Langages Rationnels

Hazaël JONES

Licence 2 - 2007/2008

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Contenu du cours

Déroulement du cours

- Suite du cours de Sabri Bayoudh
- 30 h de CM / TD
- Une deuxième évaluation de 2 heures à la fin du semestre
- Me contacter : hazael.jones@univ-st-etienne.fr
- Bureau 63 au laboratoire Hubert Curien

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Plan de l'exposé

1. Rationnel ⇔ Reconnaissable
2. Langages reconnaissables : quelques propriétés
3. Automate Canonique
4. Grammaire

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Rationnel ⇔ Reconnaissable

Théorème de Kleene

Un langage est reconnaissable (reconnu par un automate fini) si et seulement si il est rationnel (dénoté par une expression rationnelle).

⇒ A démontrer dans les deux sens :

- Expression rationnelle ⇒ Automate
- Automate ⇒ Expression rationnelle

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Expressions rationnelles ⇒ Automates

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Méthode de Thompson

- Plusieurs méthodes permettent la construction d'un automate à partir d'une expression
- méthode présentée : construction de *Thompson* "pure" qui présente quelques propriétés simples :
  - un unique état initial q_0 sans transition entrante ;
  - un unique état final q_F sans transition sortante ;
  - exactement deux fois plus d'états que de symboles dans l'expression rationnelle (sans compter les parenthèses ni la concaténation, implicite).

Avantages / Inconvénients

+ un moyen simple de trouver le résultat.
- les automates construits sont souvent plus lourds que nécessaire.

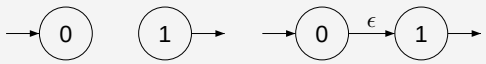
Automate de Thompson

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Automate de Thompson pour $\emptyset$

Automate de Thompson

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

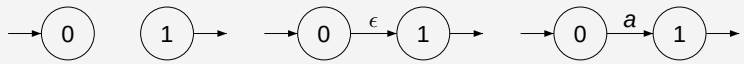


Automate de Thompson pour $\emptyset$

Automate de Thompson pour $\{\epsilon\}$

Automate de Thompson

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation



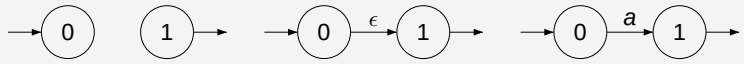
Automate de Thompson pour $\emptyset$

Automate de Thompson pour $\{\epsilon\}$

Automate de Thompson pour $\{a\}$

Automate de Thompson

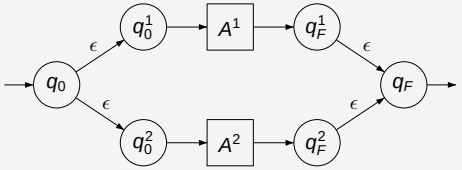
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation



Automate de Thompson pour $\emptyset$

Automate de Thompson pour $\{\epsilon\}$

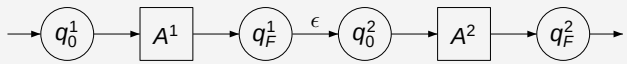
Automate de Thompson pour $\{a\}$



Automate de Thompson pour $e_1 + e_2$
avec A^1 et A^2 automates de Thompson de e_1 et e_2

Automate de Thompson

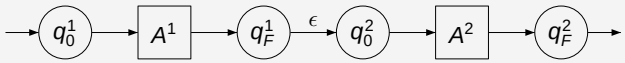
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation



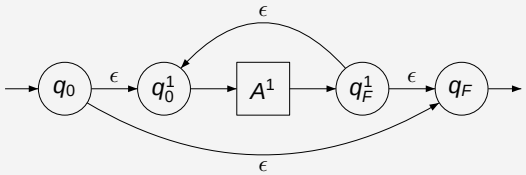
Automate de Thompson pour $e_1.e_2$

Automate de Thompson

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation



Automate de Thompson pour $e_1.e_2$



Automate de Thompson pour e_1^*

Automate de Thompson

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Algorithme de *Thompson*

- décompose une expression régulière en ses composants élémentaires
- applique les constructions précédentes pour construire l'automate correspondant
  - \+ $2n$ état pour une expression à n opérations rationnelles.
  - \- produit un automate non-déterministe contenant de multiples transitions spontanées

Automate de Thompson

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Algorithme de *Thompson*

- décompose une expression régulière en ses composants élémentaires
- applique les constructions précédentes pour construire l'automate correspondant

  + $2n$ état pour une expression à n opérations rationnelles.

  - produit un automate non-déterministe contenant de multiples transitions spontanées

Au boulot ! Automate de Thompson pour $(a+b)^*b$???

Automate de Thompson

Langages Rationnels
H. JONES

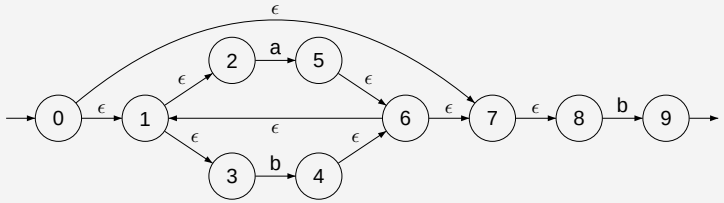
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Algorithme de *Thompson*

- décompose une expression régulière en ses composants élémentaires
- applique les constructions précédentes pour construire l'automate correspondant

  + $2n$ état pour une expression à n opérations rationnelles.

  - produit un automate non-déterministe contenant de multiples transitions spontanées



Au boulot ! Automate de Thompson pour $(a+b)^*b$???

8 / 40

Algorithme de Gloushkov

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Algorithme de Gloushkov

- On part d'une expression régulière : $aa(a+ab)^*b$
- On indice chaque lettre : $a_1a_2(a_3+a_4b_5)^*b_6$
- On crée les états correspondants $(q_1,\ldots,q_6)$ auquel on ajoute un état initial q_0.
- Etat final (si une lettre peut terminer le mot) : q_6
- Création des transitions :
  - Création de q_i vers q_j étiquettée par c_j dès que le facteur c_ic_j apparaît dans un mot
  - Création de q_0 vers q_j (étiquettée par C_j) si un mot peut commencer par c_j

Avantages / Inconvénients

- plus difficile à programmer
- oublis plus faciles
+ automate plus compact (pour n lettres, on a n+1 états)

Algorithme de Gloushkov

Langages Rationnels
H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Algorithme de Gloushkov

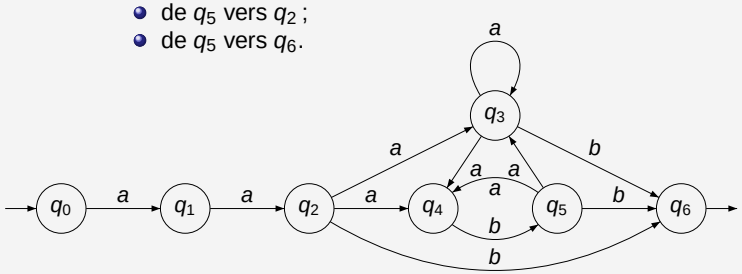
- Transitions à créer pour $a_1a_2(a_3+a_4b_5)^*b_6$:
  - a :
    - de q_0 vers q_1 ;
    - de q_1 vers q_2 ;
    - de q_2, q_3, q_5 vers q_3, q_4.
  - b :
    - de q_3 vers q_5 ;
    - de q_5 vers q_2 ;
    - de q_5 vers q_6.

Algorithme de Gloushkov

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Algorithme de Gloushkov

- Transitions à créer pour $a_1a_2(a_3 + a_4b_5)^*b_6$:
  - a :
    - de q_0 vers q_1 ;
    - de q_1 vers q_2 ;
    - de q_2, q_3, q_5 vers q_3, q_4.
  - b :
    - de q_3 vers q_5 ;
    - de q_5 vers q_2 ;
    - de q_5 vers q_6.



Reconnaissable ⇒ Rationnel

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Reconnaissable ⇒ Rationnel

- Utilisation d'une nouvelle notion : les automates généralisés
- Principe : Passage d'un automate à un rationnel en supprimant successivement les différents états du graphe jusqu'à n'avoir qu'une transition entre l'état initial et l'état final

Automates généralisés

- Différence fondamentale avec les automates finis :
  - Les transitions des automates généralisés sont étiquetées par des sous-ensembles rationnels de Σ^*.
    - par exemple : $(a + b)^* + b$
  - Un seul état initial et un seul état final
- Les automates généralisés reconnaissent exactement les mêmes langages que les automates finis "standards"

Les étapes

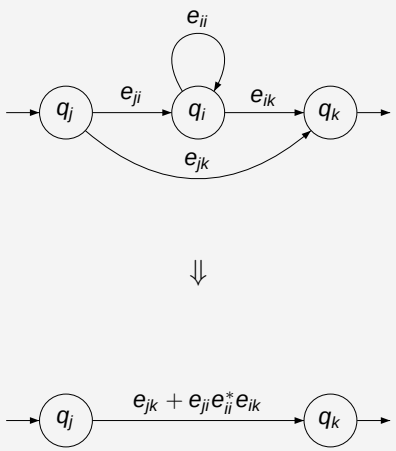
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Méthode d'élimination des états (ou algorithme de Brzozowski et McCluskey)

1. S'assurer qu'il n'y ait qu'un état initial et un état final
2. Supprimer un état s (non initial et non final) :
   - Pour chaque paire de sommets r et t dont "r, s, t" est un chemin, ajouter un arc reliant r à t de la façon suivante :
     - pour chaque paire d'états (q_j, q_k) avec $j \neq i$, $k \neq i$, tels qu'il existe une transition $q_j \to q_i$ étiquetée e_{ji} et une transition $q_i \to q_k$ étiquetée e_{ik}, ajouter la transition $q_j \to q_k$, portant l'étiquette $e_{ji}e_{ii}^*e_{ik}$.
     - Si la transition $q_j \to q_k$ existe déjà avec l'étiquette e_{jk}, alors il faut additionnellement faire : $e_{jk} = (e_{jk} + e_{ji}e_{ii}^*e_{ik})$. Cette transformation doit être opérée pour chaque paire d'états (y compris pour $q_j = q_k$) avant que q_i puisse être supprimé.
3. Itérer l'opération 2 jusqu'à ce qu'il ne reste plus que l'état initial et l'état final.

Algorithme de *Brzozowski* et *McCluskey*

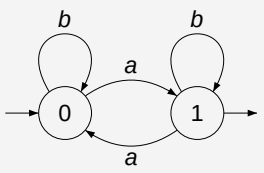
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation



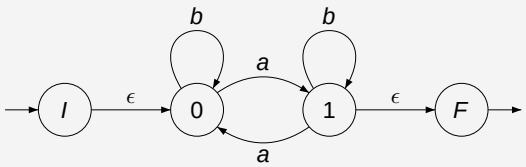
Exemple

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Nombre impair de a :



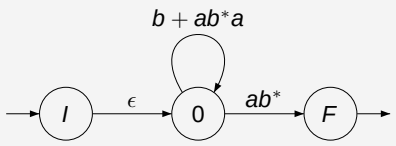
Ajout état initial et final :



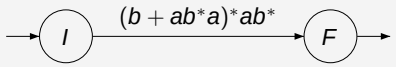
Exemple

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Suppression de l'état 1 :



Suppression de l'état 0 :



Expression rationnelle obtenue : $(b + ab^*a)^*ab^*$

Plan de l'exposé

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

1 Rationnel ⇔ Reconnaissable

2 Langages reconnaissables : quelques propriétés

3 Automate Canonique

4 Grammaire

Langages reconnaissables : quelques propriétés

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Principe du Lemme de Pompage

- Dès qu'un mot de L est assez long, il contient un facteur différent de ϵ qui peut être itéré à volonté tout en restant dans L.
- En d'autres termes, les mots "longs" de L sont construits par répétition d'un facteur s'insérant à l'intérieur de mots plus courts.
  $\Rightarrow$ Factorisation possible

Langages reconnaissables : quelques propriétés

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Propriété : Lemme de Pompage

Soit L un langage rationnel infini. Il existe un entier k tel que pour tout mot x de L plus long que k, x se factorise en $x = uvw$, avec :

- $|v| \geq 1$
- $|uv| \leq k$
- $\forall i \geq 0, uv^iw$ est également un mot de L.

Le lemme de pompage est une condition nécessaire mais non suffisante pour la rationalité

Langages reconnaissables : quelques propriétés

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Langage des carrés parfaits

- $L = \{u \in \Sigma^*, \exists v \backslash u = v^2\}$ est-il rationnel ?

Langages reconnaissables : quelques propriétés

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Langage des carrés parfaits

- $L = \{u \in \Sigma^*, \exists v \backslash u = v^2\}$ est-il rationnel ?
- soit k l'entier spécifié par le lemme, x un mot plus grand que $2k$
- $x = yy$ avec $|y| \geq k$
- on peut écrire $x = uvw$, avec $|uv| \leq k$
- uv est un préfixe de y, et y un suffixe de w
- uv^iw doit également être dans L
- impossible car seul un y est affecté par l'opération uv^iw.

Langages reconnaissables : quelques propriétés

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Langage des carrés parfaits

- $L = \{u \in \Sigma^*, \exists v \backslash u = v^2\}$ est-il rationnel ?
- soit k l'entier spécifié par le lemme, x un mot plus grand que $2k$
- $x = yy$ avec $|y| \geq k$
- on peut écrire $x = uvw$, avec $|uv| \leq k$
- uv est un préfixe de y, et y un suffixe de w
- uv^iw doit également être dans L
- impossible car seul un y est affecté par l'opération uv^iw.
- dans un automate, le choix de l'état successeur pour un état q ne dépend que de q, et pas de la manière dont le calcul s'est déroulé avant q.
- un automate fini possède une mémoire finie.

Langages reconnaissables : quelques propriétés

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Théorème

Si A est un automate fini contenant k états :

- $L(A)$ est non vide $\Leftrightarrow$ A reconnaît un mot de longueur strictement inférieure à k.
- $L(A)$ est infini $\Leftrightarrow$ A reconnaît un mot u tel que $k \leq |u| \leq 2k$

Théorème

Soit A un automate fini, il existe un algorithme permettant de décider si :

- $L(A)$ est vide
- $L(A)$ est fini / infini

Langages reconnaissables : quelques propriétés

Langages Rationnels
H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Théorème

Si A est un automate fini contenant k états :

- $L(A)$ est non vide $\Leftrightarrow$ A reconnaît un mot de longueur strictement inférieure à k.
- $L(A)$ est infini $\Leftrightarrow$ A reconnaît un mot u tel que $k \leq |u| \leq 2k$

Théorème

Soit A un automate fini, il existe un algorithme permettant de décider si :

- $L(A)$ est vide : il suffit de tester $|\Sigma|^k$
- $L(A)$ est fini / infini

Langages reconnaissables : quelques propriétés

Langages Rationnels
H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Théorème

Si A est un automate fini contenant k états :

- $L(A)$ est non vide $\Leftrightarrow$ A reconnaît un mot de longueur strictement inférieure à k.
- $L(A)$ est infini $\Leftrightarrow$ A reconnaît un mot u tel que $k \leq |u| \leq 2k$

Théorème

Soit A un automate fini, il existe un algorithme permettant de décider si :

- $L(A)$ est vide : il suffit de tester $|\Sigma|^k$
- $L(A)$ est fini / infini : $|\Sigma|^{2k} - |\Sigma|^k$ vérifications suffisent pour prouver qu'un automate reconnaît un langage infini

Langages reconnaissables : quelques propriétés

Langages Rationnels
H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Théorème

Soient A_1 et A_2 deux automates finis. Il existe une procédure permettant de décider si A_1 et A_2 sont équivalents.

$\Rightarrow$ Tester si le langage reconnu par l'automate $(L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}) \cup (\overline{L(A_1)} \cap L(A_2))$ est vide.

Plan de l'exposé

1 Rationnel ⇔ Reconnaissable
2 Langages reconnaissables : quelques propriétés
3 Automate Canonique
4 Grammaire

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Automate Canonique

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définition : Mots indistinguables d'un langage

Soit L un langage de $\sum^*$. Deux mots de u et v sont dits indistinguables dans L si pour tout $w \in \sum^*$, soit uw et vw sont tous deux dans L, soit uw et vw sont tous deux dans $\bar{L}$. On notera $\equiv L$ la relation d'indistinguabilité dans L.

Exemples

- $L = a(a+b)(bb)$
- $u = aab$ et $v = abb$
- $u = a$ et $v = aa$

Automate Canonique

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définition : Mots indistinguables d'un langage

Soit L un langage de $\sum^*$. Deux mots de u et v sont dits indistinguables dans L si pour tout $w \in \sum^*$, soit uw et vw sont tous deux dans L, soit uw et vw sont tous deux dans $\bar{L}$. On notera $\equiv L$ la relation d'indistinguabilité dans L.

Exemples

- $L = a(a+b)(bb)$
- $u = aab$ et $v = abb$: indistinguables
- $u = a$ et $v = aa$

Automate Canonique

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définition : Mots indistinguables d'un langage

Soit L un langage de $\sum^*$. Deux mots de u et v sont dits indistinguables dans L si pour tout $w \in \sum^*$, soit uw et vw sont tous deux dans L, soit uw et vw sont tous deux dans $\bar{L}$. On notera $\equiv L$ la relation d'indistinguabilité dans L.

Exemples

- $L = a(a+b)(bb)$
- $u = aab$ et $v = abb$: indistinguables
- $u = a$ et $v = aa$: distinguables (il suffit de prendre $w = abb$)

Automate Canonique

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définition : Mots indistinguables d'un automate

Soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe. Deux mots u et v sont dits indistinguables dans A ssi $\delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$. On notera $\equiv_A$ la relation d'indistinguabilité dans A.

Définition similaire à celle d'un langage :

- 2 mots u et v sont indistinguables pour A si on a un état q tel que :
  - q est le calcul de u par A depuis q_0
  - q est le calcul de v par A depuis q_0

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définition : Invariance droite

Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur Σ^* est dite invariante à droite si et seulement si : $u\mathcal{R}v \Rightarrow \forall w, uw\mathcal{R}vw$. Une relation invariante à droite est appelée une congruence droite.

- Par définition, les deux relations d'indistinguabilité définies ci-dessus sont invariantes à droite.

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Théorème : Myhill-Nerode

Soit L un langage sur Σ, les trois assertions sont équivalentes :

1. L est un langage rationnel
2. il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur Σ^*, invariante à droite, ayant un nombre fini de classes d'équivalence et telle que L est égal à l'union de classes d'équivalence de $\equiv$
3. $\equiv_L$ possède un nombre fini de classes d'équivalence

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Théorème : Myhill-Nerode

Soit L un langage sur Σ, les trois assertions sont équivalentes :

1. L est un langage rationnel
2. il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur Σ^*, invariante à droite, ayant un nombre fini de classes d'équivalence et telle que L est égal à l'union de classes d'équivalence de $\equiv$
3. $\equiv_L$ possède un nombre fini de classes d'équivalence

$1 \Rightarrow 2$:

1. L rationnel $\Longrightarrow \exists$ un DFA A qui le reconnaît.
2. $\equiv_A$ a autant de classes d'équivalence que d'états, ce nombre est fini.
3. $\equiv_A$ est invariante à droite, et L est l'union des classes d'équivalence associées aux états finaux de A.

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Théorème : Myhill-Nerode

Soit L un langage sur Σ, les trois assertions sont équivalentes :

1. L est un langage rationnel
2. il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur Σ^*, invariante à droite, ayant un nombre fini de classes d'équivalence et telle que L est égal à l'union de classes d'équivalence de $\equiv$
3. $\equiv_L$ possède un nombre fini de classes d'équivalence

$2 \Rightarrow 3$:

1. soit $u, v \setminus u \equiv v$, invariance droite $\Rightarrow \forall w \in \Sigma^*$ $uw \equiv vw \Rightarrow$
   - soit $uw, vw \in L$ (si leur classe d'équivalence $\subset L$)
   - soit tout deux hors de L (dans le cas contraire).

   D'où $u \equiv_L v$
2. toute classe d'équivalence pour $\equiv$ est incluse dans une classe d'équivalence de $\equiv_L$
3. il y a moins de classes d'équivalence pour $\equiv_L$ que pour $\equiv$
4. le nombre de classes d'équivalence de $\equiv_L$ est fini.

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Théorème : Myhill-Nerode

Soit L un langage sur Σ, les trois assertions sont équivalentes :

1. L est un langage rationnel
2. il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur Σ^*, invariante à droite, ayant un nombre fini de classes d'équivalence et telle que L est égal à l'union de classes d'équivalence de $\equiv$
3. $\equiv_L$ possède un nombre fini de classes d'équivalence

$3 \Rightarrow 1$:

- Construisons l'AFD complet $A = (\Sigma, Q, q_0, F, d)$ suivant :
  - $q_0 = [\epsilon]_L$ classe d'équivalence de ϵ de $\equiv_L$, $F = [u]_L, u \in L$
  - $q \in Q$ correspond à $[u]_L \Rightarrow Q$ est fini,
  - $\delta([u]_L, a) = [ua]_L$ indépendante du choix de u.

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Théorème : Myhill-Nerode

Soit L un langage sur Σ, les trois assertions sont équivalentes :

1. L est un langage rationnel
2. il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur Σ^*, invariante à droite, ayant un nombre fini de classes d'équivalence et telle que L est égal à l'union de classes d'équivalence de $\equiv$
3. $\equiv_L$ possède un nombre fini de classes d'équivalence

$3 \Rightarrow 1$:

- A reconnaît L :
  - $\delta(q_0, u) = [u]_L$ vraie pour $u = \epsilon$
  - supposons vrai pour $u \backslash |u| = k \Rightarrow \delta(q_0, u) = [u]_L \Rightarrow \delta(\delta(q_0, u), a) = \delta([u]_L, a) = [ua]_L = \delta(q_0, ua) \Rightarrow$ vrai pour $|ua| = k + 1$
  - $u \in L(A) \Leftrightarrow u \in L$

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Automate Canonique

Automate canonique

Automate fondé sur la relation d'équivalence $\equiv_L$: c'est le plus petit automate déterministe complet reconnaissant L. Cet automate est unique (à une renumérotation des états près) et appelé automate canonique de L.

- A un automate fini déterministe reconnaissant L
- $\equiv_A$ définit une relation d'équivalence
- chaque état de A correspond à une classe d'équivalence (pour $\equiv_A$) incluse dans une classe d'équivalence pour $\equiv_L$
- le nombre d'états de A est donc nécessairement plus grand que celui de A_L

Construction d'un automate canonique

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définition : États indistinguables

Deux états q et p d'un automate fini déterministe A sont distinguables s'il existe un mot w tel que le calcul (q, w) termine dans un état final alors que le calcul (p, w) échoue. Si deux états ne sont pas distinguables, ils sont indistinguables. On notera $\equiv_v$ la relation d'indistinguabilité sur les états.

- Pour un automate $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$, $A_v = (\Sigma, Q_v, [q_0]_v, F_v, \delta_v) = A_L$
  - Q_v l'ensemble des classes d'équivalence $[q]_v$.
  - $\delta_v([q]_v, a) = [\delta(q, a)]_v$
  - $F_v = [q]_v$, avec $q \in F$

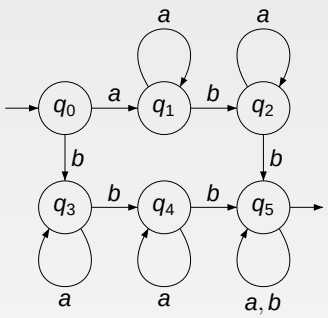
Algorithme de Moore

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

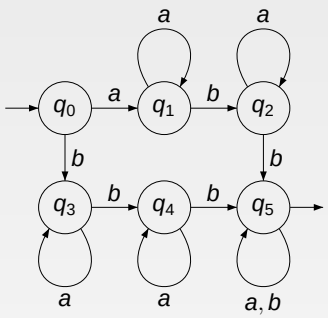
L'idée de l'algorithme de minimisation de $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ consiste à chercher à identifier les classes d'équivalence pour $\equiv_v$, de manière à dériver l'automate A.

- initialiser avec une partition à deux classes d'équivalence : F et $Q \backslash F$
- Itérer jusqu'à stabilisation :
  - pour toute paire d'état q et p dans la même classe de la partition Π_k, s'il existe $a \in \Sigma$ tel que $\delta(q, a)$ et $\delta(p, a)$ ne sont pas dans la même classe pour Π_k, alors ils sont dans deux classes différentes de Π_{k+1}.

Deux états sont donc dans la même classe si et seulement si ils sont indistinguables.

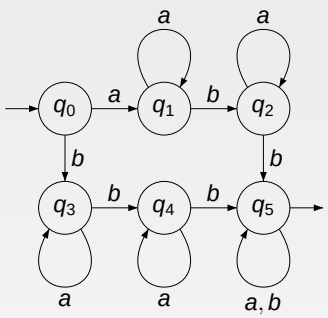


Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

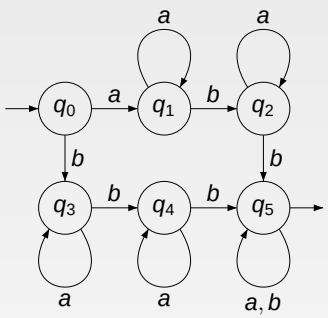


- $\Pi_0 = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_5 est le seul état final),

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation



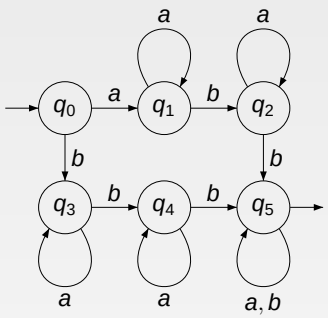
- $\Pi_0 = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_5 est le seul état final),
- $\Pi_1 = \{\{q_0, q_1, q_3\}, \{q_2, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_2 et q_4, sur le symbole b, atteignent q_5),



- $\Pi_0 = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_5 est le seul état final),
- $\Pi_1 = \{\{q_0, q_1, q_3\}, \{q_2, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_2 et q_4, sur le symbole b, atteignent q_5),
- $\Pi_2 = \{\{q_0\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_1 et q_3, sur le symbole b, atteignent respectivement q_2 et q_4),

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

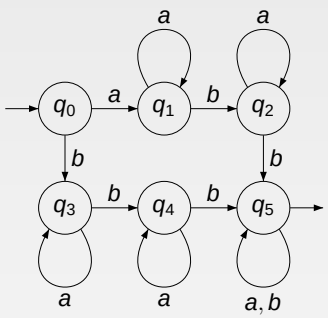
30 / 40



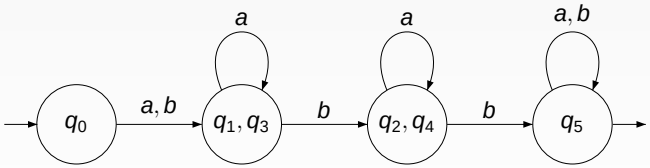
- $\Pi_0 = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_5 est le seul état final),
- $\Pi_1 = \{\{q_0, q_1, q_3\}, \{q_2, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_2 et q_4, sur le symbole b, atteignent q_5),
- $\Pi_2 = \{\{q_0\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_1 et q_3, sur le symbole b, atteignent respectivement q_2 et q_4),
- $\Pi_3 = \Pi_2$ fin de la procédure.

Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

30 / 40



- $\Pi_0 = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_5 est le seul état final),
- $\Pi_1 = \{\{q_0, q_1, q_3\}, \{q_2, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_2 et q_4, sur le symbole b, atteignent q_5),
- $\Pi_2 = \{\{q_0\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_4\}, \{q_5\}\}$ (car q_1 et q_3, sur le symbole b, atteignent respectivement q_2 et q_4),
- $\Pi_3 = \Pi_2$ fin de la procédure.



Langages Rationnels
H. JONES
Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

30 / 40

Plan de l'exposé

1. Rationnel ⇔ Reconnaissable
2. Langages reconnaissables : quelques propriétés
3. Automate Canonique
4. Grammaire

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Grammaire

Qu'est-ce que c'est ?

- Outil permettant de décrire des langages, inspirés des grammaires utilisées pour les phrases du langage naturel
- Par exemple, pour une phrase simple :
  - sujet ⇒ verbe ⇒ proposition ⇒ complément
  - Il vient à l'école
  - Anne va au marché

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Grammaire

Définition

Une grammaire G est un quadruplet (V_t, V_n, S, R)

- V_t est un ensemble fini de symboles dits terminaux, appelés vocabulaire terminal
- V_n est un ensemble fini (disjoint de Vt) de symboles dits non-terminaux, appelés vocabulaire non terminal
- $V = V_n \cup V_t$ est appelé vocabulaire de la grammaire G
- S est un non-terminal particulier appelé source ou axiome
- $R \subseteq (V^* \backslash V^t) \times V^t$ est un ensemble de règles de grammaires notées $g \rightarrow d$ avec $(g, d) \in R$

Notation

On utilise des majuscules (ou des mots commencant par une majuscule) pour les non terminaux et des minuscules pour les terminaux

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Grammaire

Exemple

- $V_t = \{a, b\}$
- $V_n = S, A, B$
- $R = S \rightarrow A, S \rightarrow B, B \rightarrow bB, A \rightarrow aA, A \rightarrow \epsilon, B \rightarrow \epsilon$

Mots générés

- Régle activée : $S \rightarrow A$: A
-
-
-
-
-

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Grammaire

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Exemple

- $V_t = \{a, b\}$
- $V_n = S, A, B$
- $R = S \to A, S \to B, B \to bB, A \to aA, A \to \epsilon, B \to \epsilon$

Mots générés

- Régle activée : $S \to A$: A
- Régle activée : $A \to aA$: aA
-
-
-
-

Grammaire

Langages Rationnels

H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Exemple

- $V_t = \{a, b\}$
- $V_n = S, A, B$
- $R = S \to A, S \to B, B \to bB, A \to aA, A \to \epsilon, B \to \epsilon$

Mots générés

- Régle activée : $S \to A$: A
- Régle activée : $A \to aA$: aA
-
-
-

34 / 40

Grammaire

Langages Rationnels

H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Exemple

- $V_t = \{a, b\}$
- $V_n = S, A, B$
- $R = S \to A, S \to B, B \to bB, A \to aA, A \to \epsilon, B \to \epsilon$

Mots générés

- Régle activée : $S \to A$: A
- Régle activée : $A \to aA$: aA
- Régle activée : $A \to aA$: aaA
-
-

34 / 40

Grammaire

Langages Rationnels

H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Exemple

- $V_t = \{a, b\}$
- $V_n = S, A, B$
- $R = S \to A, S \to B, B \to bB, A \to aA, A \to \epsilon, B \to \epsilon$

Mots générés

- Régle activée : $S \to A$: A
- Régle activée : $A \to aA$: aA
- Régle activée : $A \to aA$: aaA
- Régle activée : $A \to aA$: aaaA
-

34 / 40

Grammaire

Langages Rationnels

H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Exemple

- $V_t = \{a, b\}$
- $V_n = S, A, B$
- $R = S \to A, S \to B, B \to bB, A \to aA, A \to \epsilon, B \to \epsilon$

Mots générés

- Régle activée : $S \to A$: A
- Régle activée : $A \to aA$: aA
- Régle activée : $A \to aA$: aaA
- Régle activée : $A \to aA$: aaaA
- Régle activée : $A \to aA$: aaaaA
-

34 / 40

Grammaire

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Exemple

- $V_t = \{a, b\}$
- $V_n = S, A, B$
- $R = S \to A, S \to B, B \to bB, A \to aA, A \to \epsilon, B \to \epsilon$

Mots générés

- Régle activée : $S \to A$: A
- Régle activée : $A \to aA$: aA
- Régle activée : $A \to aA$: aaA
- Régle activée : $A \to aA$: aaaA
- Régle activée : $A \to aA$: aaaaA
- Régle activée : $A \to \epsilon$: aaaa

Grammaire

Langages Rationnels
H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Exemple

- $V_t = \{a, b\}$
- $V_n = S, A, B$
- $R = S \to A, S \to B, B \to bB, A \to aA, A \to \epsilon, B \to \epsilon$

Mots générés

- Régle activée : $S \to A$: A
- Régle activée : $A \to aA$: aA
- Régle activée : $A \to aA$: aaA
- Régle activée : $A \to aA$: aaaA
- Régle activée : $A \to aA$: aaaaA
- Régle activée : $A \to \epsilon$: aaaa

⇒ La grammaire reconnaît le langage rationnel $a^* + b^*$

Différents types de grammaire

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Hiérarchie de Chomsky :

Grammaire de type 0

la plus générale, correspond à la définition globale donnée : pas de restriction sur les règles

Grammaire contextuelle (de type 1)

Grammaire hors-contexte (de type 2)

Grammaire régulière (de type 3)

Grammaire contextuelle (de type 1)

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définitions

- Règle contextuelle : étant donné une grammaire $G = \{V_t, V_n, S, R\}$, une règle de R est dite contextuelle si elle est de la forme $g \to d$ avec $|g| \leq |d|$
- Grammaire contextuelle : une grammaire est contextuelle si toutes ses règles le sont, et le langage engendré est alors dit *contextuel* ou de type 1.

Grammaire contextuelle (de type 1)

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définitions

- Règle contextuelle : étant donné une grammaire $G = \{V_t, V_n, S, R\}$, une règle de R est dite contextuelle si elle est de la forme $g \rightarrow d$ avec $|g| \leq |d|$
- Grammaire contextuelle : une grammaire est contextuelle si toutes ses règles le sont, et le langage engendré est alors dit *contextuel* ou de type 1.

Exemple

- $S \rightarrow aSBC|\epsilon$
- $CB \rightarrow BC$
- $aB \rightarrow ab$
- $bB \rightarrow ab$
- $bC \rightarrow bc$
- $cC \rightarrow cc$

$\Rightarrow$ Language reconnu ?

Grammaire contextuelle (de type 1)

Langages Rationnels
H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définitions

- Règle contextuelle : étant donné une grammaire $G = \{V_t, V_n, S, R\}$, une règle de R est dite contextuelle si elle est de la forme $g \rightarrow d$ avec $|g| \leq |d|$
- Grammaire contextuelle : une grammaire est contextuelle si toutes ses règles le sont, et le langage engendré est alors dit *contextuel* ou de type 1.

Exemple

- $S \rightarrow aSBC|\epsilon$
- $CB \rightarrow BC$
- $aB \rightarrow ab$
- $bB \rightarrow ab$
- $bC \rightarrow bc$
- $cC \rightarrow cc$

$\Rightarrow$ Language reconnu ? $\Rightarrow \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$

Grammaire hors contexte (de type 2)

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définitions

- Règle hors contexte : étant donné une grammaire $G = \{V_t, V_n, S, R\}$, une règle $g \rightarrow d$ de R est dite hors contexte si $g \in V_n$ et $d \in (V_n \cup V_t)^*$.
- Grammaire hors contexte : une grammaire est hors contexte si toutes ses règles le sont, et le langage engendré est alors dit *hors contexte* ou de type 2.

Grammaire hors contexte (de type 2)

Langages Rationnels
H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définitions

- Règle hors contexte : étant donné une grammaire $G = \{V_t, V_n, S, R\}$, une règle $g \rightarrow d$ de R est dite hors contexte si $g \in V_n$ et $d \in (V_n \cup V_t)^*$.
- Grammaire hors contexte : une grammaire est hors contexte si toutes ses règles le sont, et le langage engendré est alors dit *hors contexte* ou de type 2.

Exemple

- $S \rightarrow \epsilon$
- $S \rightarrow aSb$

$\Rightarrow$ Language reconnu ?

Grammaire hors contexte (de type 2)

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définitions

- Règle hors contexte : étant donné une grammaire $G = \{V_t, V_n, S, R\}$, une règle $g \to d$ de R est dite hors contexte si $g \in V_n$ et $d \in (V_n \cup V_t)^*$.
- Grammaire hors contexte : une grammaire est hors contexte si toutes ses règles le sont, et le langage engendré est alors dit *hors contexte* ou de type 2.

Exemple

- $S \to \epsilon$
- $S \to aSb$

$\Rightarrow$ Language reconnu ? $\Rightarrow \{a^n b^n | n \geq 0\}$

Grammaire régulière (de type 3)

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définitions

- Règle régulière : étant donné une grammaire $G = \{V_t, V_n, S, R\}$, une règle $g \to d$ de R est dite régulière si elle est de la forme $N \to u$ ou $N \to uM$ où $N, M \in V_n$ et $u \in V_t^*$.
- Grammaire régulière : une grammaire est régulière si toutes ses règles le sont, et le langage engendré est alors dit *régulier* (ou rationnel) ou de type 3.

Grammaire régulière (de type 3)

Langages Rationnels
H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définitions

- Règle régulière : étant donné une grammaire $G = \{V_t, V_n, S, R\}$, une règle $g \to d$ de R est dite régulière si elle est de la forme $N \to u$ ou $N \to uM$ où $N, M \in V_n$ et $u \in V_t^*$.
- Grammaire régulière : une grammaire est régulière si toutes ses règles le sont, et le langage engendré est alors dit *régulier* (ou rationnel) ou de type 3.

Exemple

- $N \to 0$
- $N \to 1$
- $N \to 1M$
- $M \to 0$
- $M \to 1$
- $M \to 0M$
- $M \to 1M$

$\Rightarrow$ Language reconnu ?

Grammaire régulière (de type 3)

Langages Rationnels
H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définitions

- Règle régulière : étant donné une grammaire $G = \{V_t, V_n, S, R\}$, une règle $g \to d$ de R est dite régulière si elle est de la forme $N \to u$ ou $N \to uM$ où $N, M \in V_n$ et $u \in V_t^*$.
- Grammaire régulière : une grammaire est régulière si toutes ses règles le sont, et le langage engendré est alors dit *régulier* (ou rationnel) ou de type 3.

Exemple

- $N \to 0$
- $N \to 1$
- $N \to 1M$
- $M \to 0$
- $M \to 1$
- $M \to 0M$
- $M \to 1M$

$\Rightarrow$ Language reconnu ? $\Rightarrow$ Entiers en binaire

Arbre de dérivation

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Définition

- Etant donnée une grammaire $G = (V_t, V_n, S, R)$, les arbres de dérivation de G sont des arbres dont les noeuds internes sont étiquettés par des symboles de V_n , et les feuilles étiquetées par des symboles de V_t , tels que les étiquettes pris de gauche à droite forment un mot du language généré par la grammaire.

Arbre de dérivation

Langages Rationnels

H. JONES

Rationnel ⇔ Reconn.
Rationnel ⇒ Reconn.
Algorithme de Thompson
Algorithme de Gloushkov
Reconn. ⇒ Rationnel
Lg Reconn. : qqs props.
Lemme de Pompage
Langage des carrés parfaits
Quelques théorèmes
Automate Canonique
Mots indistinguables
Théorème de Myhill-Nerode
Automate Canonique
Construction d'un automate canonique
Grammaire
Formalisme
Exemple
Différents types de grammaire
Grammaire contextuelle (type 1)
Grammaire hors contexte (type 2)
Grammaire régulière (type 3)
Arbre de dérivation

Exemple

- $S \rightarrow \epsilon$
- $S \rightarrow a$
- $S \rightarrow b$
- $S \rightarrow aSa$
- $S \rightarrow bSb$

Arbre de dérivation ?

- *abbba*
- *baab*