

Méthode d'inférence générique avec plusieurs règles implicatives graduelles et une entrée floue

Generic inference method with several implicative gradual rules and a fuzzy input

H. Jones¹

D. Dubois²

S. Guillaume³

B. Charnomordic⁴

¹ Inra / Cemagref

² IRIT / CNRS

³ Cemagref, UMR ITAP

⁴ INRA, UMR ASB

361, rue JF Breton 34196 Montpellier Cedex 5, jones@ensam.inra.fr

118, Route de Narbonne 31062 Toulouse, didier.dubois@irit.fr

361, rue JF Breton 34196 Montpellier Cedex 5, serge.guillaume@montpellier.cemagref.fr

2, Place Viala 34060 Montpellier, bch@ensam.inra.fr

Résumé :

Cet article propose une méthode générique d'inférence avec des règles implicatives graduelles et des entrées floues. Les règles graduelles permettent de représenter des contraintes sur un ensemble de possibles et sont très intéressantes pour leur capacité d'interpolation. Nous proposons une méthode d'inférence basée sur la notion de système bien conditionné. Elle s'appuie sur l'inférence à partir d'entrées rectangulaires dont le calcul s'avère simple. Elle utilise une double décomposition : par α -coupes pour se ramener à des entrées rectangulaires et par partitionnement de ces coupes en régions rectangulaires où seules deux règles s'appliquent à la fois.

Mots-clés :

Règles implicatives graduelles, entrées floues, inférence, système bien conditionné, décomposition

Abstract:

A general approach to practical inference with gradual implicative rules and fuzzy inputs is presented. Gradual rules represent constraints restricting outputs of a fuzzy system for each input. They are tailored for interpolative reasoning. Our approach to inference is founded on the use of well-conditioned fuzzy systems. It is based on the computation of the fuzzy output under an interval-valued input. A double decomposition of fuzzy inputs is done in terms of α -cuts and in terms of a partitioning of these cuts according to areas where only two rules apply.

Keywords:

Implicative gradual rules, fuzzy inputs, inference, well conditioned system, decomposition

Les procédés de production agricole et les filières traditionnelles dans le domaine de l'agroalimentaire comme la vinification ou la fabrication du fromage sont des systèmes complexes. Leur modélisation nécessite des outils de simulation et de supervision. La logique floue, interface entre le symbolique et le numérique, est bien connue pour ses capacités

de représentation de l'incertitude des concepts.

D'un point de vue historique, les systèmes d'inférence floue ont été conçus pour modéliser une sortie continue avec des entrées symboliques [6] : de la connaissance experte approximative vers le numérique. Ensuite, vint le temps de l'apprentissage seulement guidé par l'amélioration de la performance numérique. Les systèmes flous étaient alors réduits à de simples approximateurs universels et à la modélisation approchée de fonctions. Notre démarche s'inscrit dans une modélisation des connaissances, l'interprétabilité des règles et du raisonnement est donc essentielle. Ce retour aux sources s'accompagne d'une rigueur dans le raisonnement.

Les règles conjonctives [6], qui correspondent à des valeurs d'entrée/sortie conjointement possibles, ne sont pas adaptées à une interprétation logique. Nous avons présenté dans [5] les nombreux avantages des règles implicatives par rapport aux règles conjonctives. On peut notamment mentionner qu'avec les règles conjonctives, plus on a de règles dans une base de règles, moins la sortie est précise même si ce phénomène est masqué par la défuzzification. De plus, la largeur des ensembles flous de sortie peut biaiser le résultat. Les règles implicatives graduelles ont des propriétés intéressantes d'interpolation[4] et sont compatibles avec la logique. Parmi ces règles, les plus intéressantes

en pratique utilisent l'implication de Goguen, car le résultat d'inférence est continu, et celle de Resher-Gaines, car elle produit un ensemble non flou en sortie. Les règles implicatives sont adaptées à la modélisation de contraintes, elles permettent donc de représenter des connaissances expertes [10].

Toutefois la manipulation de ces règles avec une entrée approchée reste difficile. L'objectif de cet article est de montrer que si le système de règles est bien conditionné, les partitions sont alors interprétables et l'inférence est simplifiée grâce à une double décomposition, par α -coupes et par partitionnement, de l'entrée.

La suite de l'article est organisée comme suit. La section 1 rappelle les caractéristiques de ces règles. Le mécanisme d'inférence est discuté dans la section 2. En section 3, nous présentons les conditions suffisantes à l'obtention d'un système bien conditionné. Ensuite, en section 4, nous proposons une méthode permettant de décomposer une entrée floue afin d'obtenir des entrées rectangulaires et de limiter l'influence des partitions. Pour finir, nous verrons en section 5 en quoi cette décomposition permet de simplifier l'inférence.

1 Règles implicatives

Les règles conjonctives [6] représentent des exemples de ce qui est possible et où la proposition « $x \in A_i$ » correspond à $\forall u \in U, \delta_X(u) \geq \mu_{A_i}(u)$ où $\delta_X(u)$ est une distribution de possibilité garantie [3] et U l'univers d'intérêt. Au contraire, les règles implicatives peuvent être vues comme une application directe des théories de Zadeh sur le raisonnement approché [12]. Selon Zadeh, chaque grain de connaissance est considéré comme une restriction sur un ensemble de possibles. La proposition « $x \in A_i$ » peut alors être interprétée ainsi :

$$\forall u \in U, \pi_X(u) \leq \mu_{A_i}(u)$$

avec $\pi_X(u)$ une distribution de possibilité. Les règles implicatives constituent une extension de la logique classique. Au modus ponens $A \wedge (A \rightarrow B) \models B$ de l'inférence logique correspond le modus ponens généralisé [7] : $A' \wedge (A \rightarrow B) \models B'$, où \models représente l'inférence logique.

Ce qui signifie que d'un fait approché A' et de l'implication $A \rightarrow B$, on est capable de déduire une valeur B' définie par :

$$\mu_{B'}(v) = \sup_{u \in U} \mu_{A'}(u) \top (\mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v)) \quad (1)$$

B' restreint de façon certaine la valeur de la variable de sortie. Les opérateurs de conjonction \top et d'implication \rightarrow ne sont pas indépendants. Le choix de l'un détermine l'autre. L'agrégation de ces règles se fait de manière conjonctive car celles-ci représentent une possibilité non garantie : des valeurs considérées comme possibles par une règle peuvent être interdites par d'autres règles.

Il existe différents types de règles implicatives dont les principales sont : les règles à certitude et les règles graduelles. Dans cet article, nous étudierons exclusivement les règles graduelles. Le comportement des règles implicatives graduelles, « plus X est A , alors plus Y est B », dépend de l'implication choisie. Nous considérons ici les implications suivantes :

- Resher-Gaines : $a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Gödel : $a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$
- Goguen : $a \rightarrow b = \begin{cases} \min(1, b/a) & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

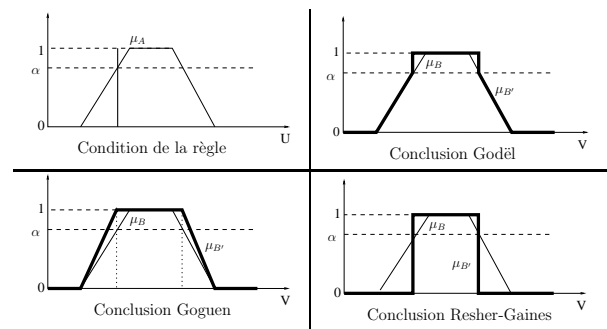


Figure 1 – Inférence avec une règle implicative graduelle et une entrée précise

2 Le mécanisme d'inférence

Dans le cas de plusieurs règles implicatives, la sortie B' est donnée par :

$$B' = A' o \bigcap_{i=1}^n (A_i \rightarrow B_i) \quad (2)$$

où o est l'opérateur de composition sup-min. Lorsque A' est une entrée précise, les opérateurs o et \bigcap commutent, la sortie peut alors s'écrire :

$$B' = \bigcap_{i=1}^n ((A' o A_i) \rightarrow B_i)$$

Cette écriture correspond à l'écriture FITA¹, cette méthode est facile à implémenter car elle permet d'effectuer l'inférence règle par règle.

Cependant, lorsque l'entrée A' est floue, la commutation des opérateurs o et \bigcap n'est plus possible, seule l'expression (2), qui correspond à une inférence FATI² est correcte : il faut d'abord agréger toutes les règles avant de pouvoir inférer. Actuellement, il n'existe pas de méthode permettant de bien manipuler ce type d'inférence avec des règles floues. Les travaux existants traitent seulement l'implication de Resher-Gaines [11]. Une autre méthode a été développée dans [1] pour l'implication de Gödel mais elle impose des partitions dans lesquelles les noyaux s'intersectent.

On remarque tout de même que pour un fait approché, l'inclusion suivante est vérifiée :

$$A' o \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \rightarrow B_i \right) \subseteq \bigcap_{i=1}^n \left((A' o A_i) \rightarrow B_i \right)$$

La méthode FITA donne donc une approximation du résultat.

3 Système bien conditionné

Afin de simplifier le calcul de l'inférence, nous cherchons à déterminer les conditions permettant d'obtenir un système bien conditionné. Alors, les résultats fournis par chaque règle à partir d'informations locales situées dans le domaine défini par sa partie condition ne sont pas affectés par les autres règles.

¹FITA signifie "First Infer Then Aggregate"

²FATI signifie "First Aggregate Then Infer"

3.1 Définitions et résultats

Un système de règles $A_i \rightarrow B_i$ est bien conditionné s'il comprend la règle $A_j \rightarrow B_j$ et si l'on retrouve le fait B_j en sortie quand on a le fait A_j en entrée :

$$A_j o \bigcap_i (A_i \rightarrow B_i) = B_j$$

L'obtention d'un tel système est bien entendu soumis à la forme des partitions de celui-ci. Dans le cas général, cette équation n'est pas vraie, et on a alors l'équation suivante :

$$A_j o \bigcap_i (A_i \rightarrow B_i) = B'_j$$

avec $B'_j \subseteq B_j$. Le but est de trouver les partitions qui permettent d'avoir l'égalité entre B'_j et B_j . On remarque que si on remplace toutes les sorties d'un système par les B'_i inférés, on a directement un système bien conditionné composé des entrées A_i et des sorties B'_i puisque selon Morsi [9], l'équation suivante est vraie :

$$A_j o \bigcap_i (A_i \rightarrow B'_i) = B'_j$$

La démonstration de Morsi utilise les propriétés de l'implication résiduelle [8] vérifiées par les opérateurs de Gödel et Goguen et la relation : $\bigcap_i (A_i \rightarrow B_i) = \bigcap_i (A_i \rightarrow B'_i)$ démontrée dans [9]. Donc si on calcule pour tout i les différentes sorties B'_i et qu'on remplace les B_i par B'_i dans l'équation d'inférence, alors le nouveau système de règles ainsi créé est bien conditionné. Nous allons maintenant chercher à déterminer quelles partitions permettraient d'obtenir un système bien conditionné. Notons que la démonstration qui suit ne s'applique pas à Resher-Gaines mais reste valide pour toutes les implications résiduelles à partir d'une t-norme continue.

3.2 Conditions suffisantes

En partant de l'équation (1), et puisque l'agrégation des règles implicatives est conjonctive, en prenant le min comme

opérateur de conjonction, on a :

$\forall y,$

$$\sup_{x \in U} \mu_{A_i}(x) \top \min_{j \in N} \left(\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{B_j}(y) \right) = \mu_{B_i}(y)$$

Il est possible de déplacer $\mu_{A_i}(x)$ et la t-norme \top à l'intérieur du min, ce qui nous donne :

$\forall y,$

$$\sup_{x \in U} \min_{j \in N} \left(\mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{B_j}(y)) \right) = \mu_{B_i}(y)$$

On va chercher à déterminer les conditions suffisantes pour cette égalité. Puisque $B'_i \subseteq B_i$, elle est équivalente à :

$\forall y, \exists x \in U,$

$$\min_{j \in N} \left(\mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{B_j}(y)) \right) = \mu_{B_i}(y)$$

Ce qui nous donne par la suite les deux conditions suivantes :

$\forall y, \exists x \in U,$

$$\forall j \neq k, \mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{B_j}(y)) \geq \mu_{B_i}(y) \quad (3)$$

et

$$\exists k, \mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_k}(x) \rightarrow \mu_{B_k}(y)) = \mu_{B_i}(y) \quad (4)$$

Si $k = i$, et que $x \in \text{Noyau}(A_i)$, alors l'équation (4) est vérifiée puisqu'on a :

$$\begin{aligned} \mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_k}(x) \rightarrow \mu_{B_k}(y)) &= \mu_{A_i}(x) \top (\mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{B_i}(y)) \\ &= 1 \top (1 \rightarrow \mu_{B_i}(y)) \\ &= \mu_{B_i}(y) \end{aligned}$$

On cherche maintenant à vérifier l'équation (3). Si on se restreint au cas où x appartient au noyau de A_i , alors on a la condition suffisante suivante :

$\forall y, \exists x \in \text{Noyau}(A_i), \forall j \neq i,$

$$\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{B_j}(y) \geq \mu_{B_i}(y) \quad (5)$$

car $1 \top x = x$. On a alors deux cas :

- soit $\mu_{A_j}(x) > \mu_{B_j}(y)$: alors l'équation (5) n'est pas vraie en général. Si cette situation est vérifiée pour tout x , le système ne sera pas bien conditionné. On cherche donc à éviter cette situation pour tout x .
- soit $\mu_{A_j}(x) \leq \mu_{B_j}(y)$: alors l'équation (5) est toujours respectée.

Afin de respecter cette condition, les partitions doivent satisfaire la propriété suivante : il doit exister un point du noyau pour chaque fonction d'appartenance qui n'appartient pas au support des autres ensembles. Soit en fait, comme nous le voyons sur la figure 2, $\exists x \in \text{Noyau}(A_i), \mu_{A_j}(x) = 0, \forall j \neq i$.

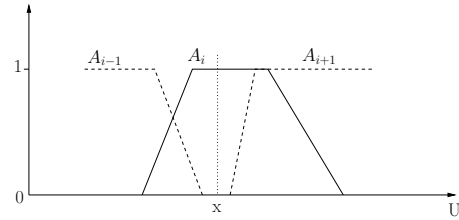


Figure 2 – Exemple d'une partition floue correspondant aux critères de bon conditionnement

Si nous imposons de plus la propriété suivante : $\forall j \neq i, \forall x \in \text{Noyau}(A_i), \mu_{A_j}(x) = 0$, qui est notamment respectée par les partitions floues fortes, alors évidemment le système est bien conditionné. Mais on a aussi une propriété plus forte : il suffit seulement de choisir x dans le noyau de A_i pour que la sortie soit égale à B_i . En effet, puisqu'on a $\forall x \in \text{Noyau}(A_i), \mu_{A_j}(x) = 0$, la relation $\mu_{A_j}(x) \rightarrow \mu_{B_j}(y)$ est égale à 1.

4 Simplification d'une entrée floue par décomposition

Nous allons maintenant utiliser des partitions floues fortes et nous servir des propriétés de bon conditionnement pour simplifier l'inférence en décomposant l'entrée de manière adéquate. Nous allons étudier deux décompositions pour voir comment celles-ci pourraient aider à simplifier le mécanisme d'inférence. On notera que ces décompositions sont possibles grâce au principe suivant pour une relation floue R :

$$(A \cup A') \circ R = (A \circ R) \cup (A' \circ R)$$

L'inférence est donc équivalente lorsqu'on infère l'union de deux ensembles flous et lorsqu'on infère ces ensembles séparément et qu'on fait ensuite l'union de leurs résultats.

4.1 Décomposition par α -coupes

Une α -coupe de A est un intervalle défini comme suit : $\forall \alpha > 0$,

$$I_{A_\alpha} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} = [I_{\alpha l}, I_{\alpha r}]$$

Selon le principe de décomposition, on a la relation suivante : $A = \bigcup_{\alpha_j \in]0,1]} A_{\alpha_j} \times \alpha_j$ ou A_{α_j} est une entrée rectangulaire de niveau 1 dont la largeur est l' α -coupe $I_{A_{\alpha_j}}$. L'entrée floue approximée de A sera incluse entre les deux approximations (cf figure 3) :

$$\bigcup_{j=1, \dots, n} \alpha_j A_{\alpha_j} \subseteq A \subseteq \bigcup_{j=1, \dots, n} \alpha_j A_{\alpha_{j+1}} \quad (6)$$

La figure 3 montre les deux décompositions possibles : par l'extérieur ou par l'intérieur.

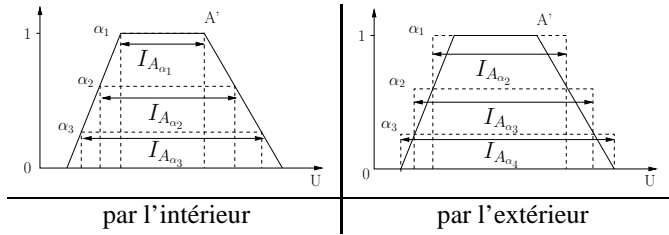


Figure 3 – Décomposition par α -coupes

La décomposition par l'extérieur qui utilise le support semble plus intéressante car elle contient l'entrée approximée. La sortie approchée contiendra donc aussi la sortie réelle. On peut imaginer aussi qu'il serait intéressant de conserver les approximations supérieure et inférieure pour pouvoir raisonner avec deux approximations comme avec les Rough Sets [2].

Comme nous le montre l'équation (6), le choix du nombre d' α -coupes déterminera la précision

de l'approximation. Une entrée floue peut donc être décomposée par α -coupes, le calcul de la sortie pourra se faire en calculant la sortie pour chaque α -coupe et en faisant l'union de tous les résultats.

4.2 Décomposition par partitionnement

On partitionne l'espace d'entrée avec les points des extrémités des supports des sous ensembles flous. On notera E_k les intervalles issus de la décomposition. Chaque E_k est dans le support d'au plus deux conditions floues (cf. figure 4). Cette décomposition permet d'isoler les noyaux pour lesquels, grâce à la notion de système bien conditionné, l'inférence est facile à calculer.

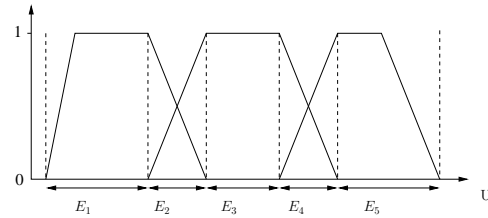


Figure 4 – Décomposition par partitionnement

En partant d'une entrée floue A' sur une partition d'entrée, on effectuera une décomposition par α -coupes pour simplifier l'entrée floue A' . Ensuite, on limitera au support de A' la décomposition par partitionnement des sous-ensembles flous d'entrée. On a donc la relation suivante :

$$A' = \bigcup_{\alpha} \left(\alpha \left(\bigcup_{k=1, \dots, p} E_k \cap A_{\alpha} \right) \right)$$

où p est le nombre d'intervalles E_k .

5 Inférence avec une entrée rectangulaire

La sortie B' correspondante sera donc égale à :

$$B' = \bigcup_{\alpha} \left(\top \left(\alpha \bigcup_{k=1, \dots, p} B'_k \right) \right)$$

avec $B'_k = (E_k \cap A_{\alpha}) \circ R$. \top est la t-norme liée à l'implication résiduelle concernée. Grâce

à la décomposition par partitionnement, nous obtenons des zones où l'influence de la partition est limitée à deux de ses éléments au plus. De plus, grâce à la décomposition par α -coupes, nous obtenons une entrée rectangulaire. Nous allons donc essayer de déterminer la sortie inférée à partir d'une entrée rectangulaire. Nous nous plaçons dans le cas le plus complexe ou l'entrée subit l'influence de deux éléments de la partition d'entrée et qu'elle se situe entre les deux noyaux. On notera que lorsque l'entrée rectangulaire se situe sur le noyau d'un élément de la partition, le résultat est alors évident. Si $E_k \cap A_\alpha$ est non vide et dans le noyau de A_i , on obtient soit B_i en sortie (Gödel, Goguen) soit le noyau de B_i (Resher-Gaines).

5.1 Entrée rectangulaire de niveau 1

Nous noterons l'intervalle concerné $[i_l, i_r]$. La fonction d'appartenance d'une entrée rectangulaire est définie par $\mu_{[i_l, i_r]}$ tel que :

$$\mu_{[i_l, i_r]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_l \leq x \leq i_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'entrée rectangulaire est située dans une zone d'intersection de deux ensembles flous (Cf figure 6).

La sortie correspondante est égale à :

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{a \leq x \leq b} \min_{i=1, \dots, n} \left(\mu_{[i_l, i_r]} \top \mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{B_i}(y) \right)$$

Dans ce cas particulier, celle-ci est égale à :

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{a \leq x \leq b} \min \left(\mu_{[i_l, i_r]} \top \mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{B_i}(y), \mu_{[i_l, i_r]} \top \mu_{A_{i+1}}(x) \rightarrow \mu_{B_{i+1}}(y) \right) \quad (7)$$

Cependant, puisque l'entrée est de type rectangulaire, on a deux cas :

- soit $\mu_{[i_l, i_r]}(x) = 0$, alors on en déduit que $\mu_{B'}(y) = 0$ car 0 est un élément absorbant pour la t-norme : $0 \top x = 0$.
- soit $\mu_{[i_l, i_r]}(x) = 1$, la formule (7) se simplifie puisque 1 est l'élément neutre de la t-norme et qu'on a donc $1 \top x = x$. L'équation devient alors :

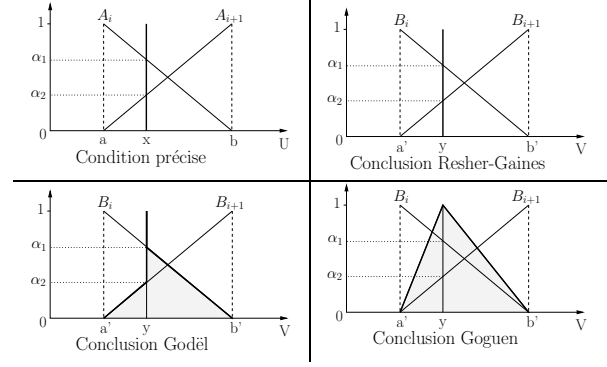


Figure 5 – Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée précise

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{i_l \leq x \leq i_r} \min \left(\mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{B_i}(y), \mu_{A_{i+1}}(x) \rightarrow \mu_{B_{i+1}}(y) \right) \quad (8)$$

Ensuite le comportement de la sortie $\mu_{B'}(y)$ dépend de l'implication résiduelle choisie. Nous étudierons les implications de Resher-Gaines, Gödel et Goguen. La figure 5 rappelle le résultat de l'inférence à partir d'une entrée précise en présence de deux règles implicatives graduelles.

Pour Resher-Gaines, on voit que lorsque l'entrée x se déplace entre i_l et i_r , la sortie y est telle que : $\mu_{B_i}(y) = \mu_{A_i}(x)$. Donc lorsque l'entrée est un intervalle $[i_l, i_r]$, alors la sortie est un intervalle $[i'_l, i'_r]$ en supposant que le passage de la règle i à la règle $i + 1$ est monotone. La figure 6 nous montre l'inférence avec un intervalle en entrée et l'implication de Resher-Gaines. De la même manière, il est possible d'inférer à partir d'une entrée rectangulaire en utilisant l'implication de Gödel et de Goguen (cf figure 6).

Nous venons de montrer qu'il est assez facile d'inférer avec une entrée rectangulaire de niveau 1. Mais qu'en est-il pour une entrée rectangulaire de niveau α ?

5.2 Entrée rectangulaire de niveau α

On part de l'équation (7). On a alors deux cas à traiter, puisque $\mu_{[i_l, i_r]}(x)$ est la fonction d'appartenance d'une entrée rectangulaire de niveau α , on a soit :

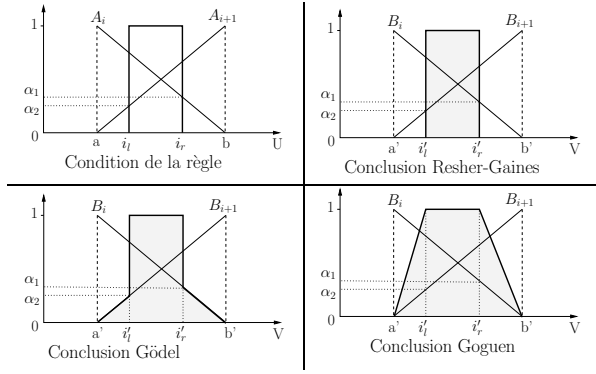


Figure 6 – Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée rectangulaire de niveau 1

- $\mu_{[i_l, i_r]}(x) = 0$ alors $\mu'_{B'}(y) = 0$
- $\mu_{[i_l, i_r]}(x) = \alpha$ alors on obtient l'équation suivante :

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{i_l \leq x \leq i_r} \min \left(\alpha \top \mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{B_i}(y), \right. \\ \left. \alpha \top \mu_{A_{i+1}}(x) \rightarrow \mu_{B_{i+1}}(y) \right)$$

Puisque α et \top sont indépendants de x et de i , le système est équivalent à :

$$\mu_{B'}(y) = \alpha \top \sup_{i_l \leq x \leq i_r} \min \left(\mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{B_i}(y), \right. \\ \left. \mu_{A_{i+1}}(x) \rightarrow \mu_{B_{i+1}}(y) \right)$$

Si on note $\mu_{B'_1}(y)$ le résultat de l'inférence avec une entrée rectangulaire de niveau 1, on a alors l'équation suivante : $\mu_{B'}(y) = \alpha \top \mu_{B'_1}(y)$.

Cette formule est sensiblement similaire à la formule avec une entrée d'un niveau de 1. On remarque que α va en fait avoir un effet limitant sur la hauteur de la sortie. Aucun élément de la sortie ne pourra être supérieur au niveau α puisque le minimum est la borne supérieure des t-normes. Ensuite, selon l'implication choisie, la t-norme ne sera pas la même. Pour Resher-Gaines et Gödel, la t-norme est le minimum. La sortie est donc tronquée au niveau α , mais

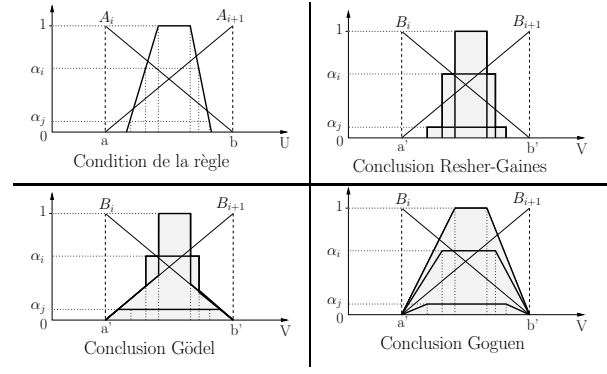


Figure 7 – Inférence avec deux règles implicatives graduelles et une entrée floue décomposée sur 3 niveaux $\alpha_j < \alpha_i < 1$

sa forme n'est pas changée. En ce qui concerne Goguen, la t-norme est le produit. La sortie est donc elle aussi tronquée au niveau α mais les pentes externes au noyau sont changées (Cf figure 7).

On s'aperçoit que si on calcule les abscisses i'_l et i'_r , on peut alors trouver la sortie de l'inférence quelle que soit l'implication utilisée : Resher-Gaines, Gödel et Goguen. On sait qu'on a les relations suivantes pour toutes ces implications : $\mu_{A_i}(i_r) = \mu_{B_i}(i'_l)$ et $\mu_{A_{i+1}}(i_l) = \mu_{B_{i+1}}(i'_r)$. Pour trouver les points i'_l et i'_r , il suffit donc de faire l'intersection de la droite $z = \mu_{A_{i+1}}(i_l)$ et de la fonction d'appartenance $\mu_{B_{i+1}}$ pour trouver i'_l . Afin de trouver i'_r , on effectuera les intersections de $z = \mu_{A_i}(i_r)$ et de la fonction d'appartenance de μ_{B_i} . Une fois que i'_l et i'_r ont été évalués, le calcul de la sortie est systématique et dépend de l'implication choisie.

6 Conclusion

Cet article propose une méthode efficace permettant d'inférer avec des règles implicatives graduelles. En utilisant des résultats récents sur les systèmes bien conditionnés, notre méthode permet d'effectuer une inférence grâce à une double décomposition. Une première décomposition par α -coupes permet de simplifier l'entrée floue en se ramenant à une union d'entrées de type rectangulaire. Ensuite la décomposition par partitionnement va nous permettre de séparer la partition en éléments facilement inférables.

Cette méthode est intéressante car elle est applicable à l'ensemble des règles implicatives graduelles. La décomposition par partitionnement s'effectue sans perte d'information, seule la décomposition par α -coupes induit une approximation. Il sera intéressant d'étudier l'impact de l'approximation résultant de la décomposition par α -coupes. Dans le cas où la fonction d'appartenance est linéaire une solution analytique exacte pourrait être fournie. Enfin, une généralisation au cas multidimensionnel sera nécessaire.

Références

- [1] D. Dubois, R. Martin-Clouaire et H. Prade. *Practical computing in fuzzy logic*, pages 11–34. *Fuzzy Computing, Gupta et al, Eds*, North-Holland, 1988.
- [2] D. Dubois et H. Prade. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. *Int. J. of General Systems*, 17 :191–209, 1990.
- [3] D. Dubois et H. Prade. What are fuzzy rules and how to use them. *Fuzzy Sets and Syst.*, 84(2) :169–185, 1996.
- [4] S. Galichet, D. Dubois et H. Prade. Imprecise specification of ill-known functions using gradual rules. *Int. J. Approx. Reasoning*, 35(3) :205–222, 2004.
- [5] H. Jones, S. Guillaume, B. Charnomordic et D. Dubois. Practical use of fuzzy implicative gradual rules in knowledge representation and comparison with Mamdani rules. EUSFLAT, 2005, Barcelona.
- [6] E. H. Mamdani et S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *Int. J. on Man-Machine Studies*, 7 :1–13, 1975.
- [7] R. Martin-Clouaire. Semantics and computation of the generalized modus ponens : The long paper. *Int. J. of Approx. Reasoning*, 3 :195–217, 1987.
- [8] N. N. Morsi. A small set of axioms for residuated logic. *Inf. Sci.*, 175(1-2) :85–96, 2005.
- [9] N. N. Morsi et A. A. Fahmy. On generalized modus ponens with multiple rules and a residuated implication. *Fuzzy Sets Syst.*, 129(2) :267–274, 2002.
- [10] L. Ughetto, D. Dubois et H. Prade. Implicative and conjunctive fuzzy rules. In *AAAI-99, Orlando, Fl (USA)*, pages 214–219, 1999. AAAIPress.
- [11] L. Ughetto, D. Dubois et H. Prade. Efficient inference procedures with fuzzy inputs. In *Proc. of the 6th IEEE Inter. Conf. on Fuzzy Systems*, pages 567–572, Barcelona, 1997.
- [12] L. A. Zadeh. A theory of approximate reasoning. *Machine Intelligence*, 9 :149–194, 1979.