

# Méthode d'inférence 2D avec des règles implicatives graduelles floues

## 2D inference with fuzzy implicative rules

H. Jones<sup>1</sup>

D. Dubois<sup>2</sup>

S. Guillaume<sup>3</sup>

B. Charnomordic<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Inra / Cemagref

<sup>2</sup> IRIT / CNRS / Université de Toulouse

<sup>3</sup> Cemagref, UMR ITAP

<sup>4</sup> INRA, UMR ASB

361, rue JF Breton 34196 Montpellier Cedex 5, jones@supagro.inra.fr

118, Route de Narbonne 31062 Toulouse, didier.dubois@irit.fr

361, rue JF Breton 34196 Montpellier Cedex 5, serge.guillaume@montpellier.cemagref.fr

2, Place Viala 34060 Montpellier, bch@supagro.inra.fr

### Résumé :

Cet article propose une méthode générique d'inférence avec des règles implicatives graduelles et des entrées floues sur deux dimensions. Les règles graduelles permettent de représenter des contraintes sur un ensemble de possibles et sont très intéressantes pour leur capacité d'interpolation. Nous proposons une méthode d'inférence basée sur la notion de système bien conditionné. Elle s'appuie sur l'inférence à partir d'entrées rectangulaires dont le calcul s'avère simple. Elle utilise une double décomposition : par partitionnement pour se ramener à une inférence locale et par  $\alpha$ -coupes pour simplifier l'entrée floue par un ensemble d'entrées rectangulaires.

### Mots-clés :

Règles implicatives graduelles, entrées floues, inférence, décomposition

### Abstract:

A general approach to practical inference with gradual implicative rules and 2D fuzzy inputs is presented. Gradual rules represent constraints restricting outputs of a fuzzy system for each input. They are tailored for interpolative reasoning. Our approach to inference is founded on the use of well-conditioned fuzzy systems. It is based on the computation of the fuzzy output under an interval-valued input. A double decomposition of fuzzy inputs is done in terms of partitioning in order to infer locally and in terms of  $\alpha$ -cuts to simplify the fuzzy input.

### Keywords:

Implicative gradual rules, 2D fuzzy inputs, inference, decomposition

La logique floue, interface entre le symbolique et le numérique, est bien connue pour ses capacités de représentation de la gradualité des concepts. Historiquement, les systèmes d'inférence floue ont été conçus pour modéliser des lois de commande [6] à par-

tir de connaissances expertes. Ces systèmes étaient représentés par des ensembles de règles "si ... alors ...", sous la forme d'une agrégation disjonctive. La défuzzification des sorties floues est une étape essentielle de ces systèmes qui voile la grande imprécision des sorties floues, et notamment le fait surprenant que plus on déclenche de règles plus l'imprécision s'accroît. En ne considérant que des règles à conclusions précises, les systèmes de Takagi-Sugeno modélisent plus directement des fonctions non-linéaires identifiables à partir de données, où l'interprétabilité n'est plus nécessairement le facteur essentiel.

Notre motivation dans cette étude est la représentation de connaissances expertes pour le diagnostic prédictif de processus alimentaires. Dans ce cadre, on cherche des systèmes d'inférences flous interprétables, qui puissent accepter des entrées imprécises. L'étape de défuzzification n'est alors plus justifiée, mais on souhaite néanmoins des conclusions suffisamment informatives. Il est alors naturel de s'intéresser à des systèmes de règles floues exprimant des contraintes (c'est à dire des implications) qui s'agrègent de façon conjonctive. Nous avons présenté dans [5] les nombreux avantages des règles implicatives par rapport aux règles conjonctives en matière de

comportement naturel du raisonnement. Les règles implicatives graduelles ont des propriétés intéressantes d'interpolation [3] et sont compatibles avec la logique. Parmi ces règles, les plus intéressantes en pratique utilisent l'implication de Goguen, car le résultat d'inférence est continu, et celle de Resher-Gaines, car elle produit un ensemble non flou en sortie qui représente le noyau de la conclusion floue obtenue avec n'importe quelle implication graduelle. Les règles implicatives sont adaptées à la modélisation de contraintes, elles permettent donc de représenter des connaissances expertes [8].

Toutefois on s'est dans le passé relativement peu intéressé à développer des méthodes d'inférence propres à ce type de système, en présence d'entrées floues, en partie parce que cela pose des problèmes de calcul pratiques. Nous avons déjà développé dans [4] une méthode efficace d'inférence à une dimension. Dans cet article, nous généralisons notre méthode d'inférence à une dimension au cas bi-dimensionnel.

La suite de l'article est organisée comme suit. La section 1 rappelle les caractéristiques des règles implicatives. Le mécanisme d'inférence est discuté dans la section 2. Ensuite, nous rappelons le principe de notre algorithme de simplification de l'inférence en section 3. Pour finir, nous verrons en section 4 comment peut s'effectuer l'inférence en deux dimensions.

## 1 Règles implicatives

Selon Zadeh [9], chaque élément de connaissance est considéré comme une restriction sur un ensemble de possibles. C'est le cas pour les règles floues implicatives.

Raisonnement avec des règles implicatives peut être vu comme une application directe des théories de Zadeh sur le raisonnement approché et constitue une extension de la logique classique. Au modus ponens  $A \wedge (A \rightarrow B) \models B$  de l'inférence logique correspond le modus ponens

généralisé [7] :  $A' \wedge (A \rightarrow B) \models B'$ , où  $\models$  représente l'inférence logique. Ce qui signifie que d'un fait approché  $A'$  et de l'implication  $A \rightarrow B$ , considérés comme des contraintes, on est capable de déduire un ensemble flou  $B'$  de valeurs possibles défini par :

$$\mu_{B'}(v) = \sup_{u \in U} \mu_{A'}(u) \top (\mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v))$$

$B'$  restreint de façon certaine la valeur de la variable de sortie. L'agrégation de ces règles se fait de manière conjonctive car des valeurs considérées comme possibles par une règle peuvent être interdites par d'autres règles : plus on déclenche de règles plus les conclusions seront précises.

Il existe différents types de règles implicatives dont les principales sont les règles à certitude et les règles graduelles. Dans cet article, nous étudierons exclusivement les règles graduelles. Les opérateurs de conjonction  $\top$  et d'implication  $\rightarrow$  sont alors liés. Le comportement des règles implicatives graduelles, « plus  $X$  est  $A$ , alors plus  $Y$  est  $B$  », dépend de l'implication choisie. Nous considérons ici les implications suivantes :

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{Resher-Gaines})$$

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{Gödel})$$

$$a \rightarrow b = \begin{cases} \min(1, b/a) & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{Goguen})$$

## 2 Le mécanisme d'inférence

Dans le cas de plusieurs règles implicatives, la sortie  $B'$  est donnée par :

$$B' = A' \circ \bigcap_{i=1}^n (A_i \rightarrow B_i) \quad (1)$$

où  $\circ$  est l'opérateur de composition  $\sup \top$ . Lorsque  $A'$  est une entrée imprécise, les opérateurs  $\circ$  et  $\bigcap$  ne peuvent commuter, c'est

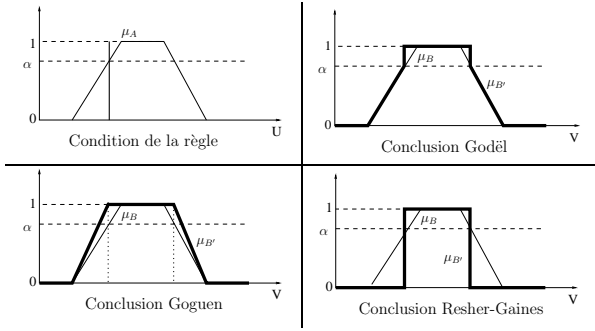


Figure 1 – Inférence avec une règle implicative graduelle et une entrée précise

à dire qu'on ne peut plus raisonner règle à règle. Ceci est déjà vrai en logique classique : si on a des règles classiques  $A_i \rightarrow B_i, i = 1, \dots, n$  et un fait disjonctif  $A_i \cup A_j$ , on vérifie que l'équation (1) fournit la conclusion attendue  $B_i \cup B_j$  alors que pour chaque règle  $k$ ,  $(A_i \cup A_j) \circ (A_k \rightarrow B_k)$  ne restreint pas les valeurs possibles de la conclusion.

Mais, d'un point de vue calculatoire il est beaucoup plus simple de faire de l'inférence règle à règle et d'agrèger les résultats, ce qui est impossible ici. Raisonner sur des faits imprécis avec des règles floues sur des référentiels numériques n'est donc pas un problème trivial. Nous avons présenté dans [4] un algorithme d'inférence à une dimension, basé sur l'indépendance inférentielle (appelé aussi système bien conditionné) et une double décomposition. Rappelons que l'indépendance inférentielle permet de simplifier le calcul de l'inférence pour des entrées dans les noyaux. Un système de règles  $A_i \rightarrow B_i$  est bien conditionné s'il comprend la règle  $A_j \rightarrow B_j$  et si l'on retrouve le fait  $B_j$  en sortie quand on a le fait  $A_j, \forall j = 1, \dots, n$  en entrée :

$$A_j \circ \bigcap_{i=1, \dots, n} (A_i \rightarrow B_i) = B_j$$

Nous avons démontré dans [4] que cette propriété est vraie notamment pour des partitions floues fortes en entrée (telles que sur la figure 2). Dans ce cas, avec les implications de type

Gödel et Goguen on a bien  $A \circ \bigcap_i (A_i \rightarrow B_i) = B_j$  dès que  $A \subseteq A_j$ ; en particulier pour une entrée précise  $A = \{x_0\}$  dans le noyau de  $A_j$ . Pour les règles de type Resher-Gaines, la sortie est égale au noyau de  $B_j$  dans ce dernier cas. Ces résultats sont valables quelle que soit la dimension de l'espace des entrées.

### 3 Simplification d'une entrée floue par décomposition

Nous avons utilisé deux décompositions successives dans [4] pour simplifier le mécanisme d'inférence. On notera que cette simplification est possible grâce au principe suivant pour une relation floue  $R$  :

$$(A \cup A') \circ R = (A \circ R) \cup (A' \circ R)$$

L'inférence de l'union de deux ensembles flous est égale à l'union de leurs inférences. Nous allons utiliser ce principe pour décomposer l'entrée à inférer en parties pour lesquelles l'inférence est simple.

- Décomposition par partitionnement : cette décomposition sert à isoler les noyaux de la partition d'entrée de ses supports (cf. figure 2). On se ramène alors à une inférence locale sur des intervalles notés  $E_k, k = 1, \dots, p$

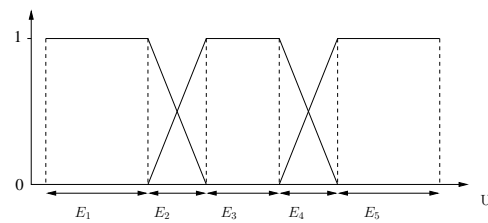


Figure 2 – Décomposition par partitionnement

- Décomposition par  $\alpha$ -coupes : on décompose l'entrée floue  $A'$  par  $M$   $\alpha$ -coupes comme le montre la figure 3 :

$$A' \subseteq \bigcup_{j=1, \dots, M} \alpha_j A_{\alpha_j}$$

Dans le cas monodimensionnel, on a donc la relation suivante pour l'entrée floue  $A'$  décomposée sur les différents intervalles  $E_k$  de la partition et par  $\alpha$ -coupes :

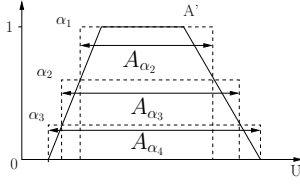


Figure 3 – Décomposition par  $\alpha$ -coupes

$$A' \simeq \bigcup_{k=1, \dots, p} \left( \bigcup_{j=1, \dots, M} (\alpha_j (E_k \cap A_{\alpha_j})) \right)$$

où  $p$  est le nombre d'intervalles  $E_k$ . La sortie  $O'$  correspondante sera donc égale à :

$$O' = \bigcup_{\alpha} \left( \alpha \top \left( \bigcup_{k=1, \dots, p} O'_k \right) \right)$$

avec  $O'_k = (E_k \cap A_{\alpha}) \circ R$ .  $\top$  est la t-norme liée à l'implication résiduelle concernée. Grâce à la décomposition par partitionnement, nous obtenons des zones où l'influence de la partition est limitée à deux de ses éléments au plus par dimension. De plus, grâce à la décomposition par  $\alpha$ -coupes, nous obtenons des entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$ .

– Inférence monodimensionnel avec une entrée rectangulaire  $[i_l, i_r]$  de niveau  $\alpha$  : l'ensemble de sortie inféré est donné par [4] :

$$\mu_{O'}(y) = \alpha \top \sup_{i_l \leq x \leq i_r} \min \left( \mu_{A_i}(x) \rightarrow \mu_{O_i}(z), \mu_{A_{i+1}}(x) \rightarrow \mu_{O_{i+1}}(z) \right)$$

Le calcul de la sortie pour une entrée rectangulaire est immédiat et dépend de l'implication choisie : Resher-Gaines, Gödel ou Gougen.

## 4 Inférence 2D

Nous nous limiterons ici à une inférence à partir d'entrées floues dans le cas bidimensionnel avec Resher-Gaines. Les règles sont de la forme  $A_k \wedge B_l \rightarrow O_{k,l}$ . Une double décomposition est faite comme expliqué précédemment pour chaque entrée floue (décomposition par partitionnement, décomposition par  $\alpha$ -coupes avec  $\alpha$  identique dans chaque dimension).

Par conséquent, la sortie inférée est le résultat d'une double union :

$$O' = \bigcup_{k,l=1, \dots, p} \left( \bigcup_{j=1, \dots, M} (\alpha_j \top O'_{k,l}) \right) \quad (2)$$

où  $\top$  est la t-norme de l'implication résiduelle et  $\bigcup$  est le maximum. Dans (2),  $O'_{k,l}$  est le résultat de l'inférence des entrées rectangulaires.  $A_{\alpha_j}$  et  $B_{\alpha_j}$  décomposés respectivement sur les intervalles  $E_k$  et  $F_l$  des 2 partitions d'entrée.

Considérons l'inférence à partir d'entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$  dans chaque dimension. Est-il suffisant d'inférer à partir de chaque borne des entrées rectangulaires afin d'obtenir les bornes de la sortie ? Cette question se ramène à des problèmes de continuité et de monotonie de la sortie. Nous allons examiner les différentes étapes de la procédure.

### 4.1 Partitions de sortie d'un système à deux dimensions

Dans cette section, nous nous intéressons au choix de la partition de sortie. Soit par exemple des partitions d'entrée fortes (cf. figure 4) et le système de règles suivant :

- Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{1,1}$
- Si  $X$  est  $A_1$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{1,2}$
- Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_1$  alors  $Z$  est  $O_{2,1}$
- Si  $X$  est  $A_2$  et  $Y$  est  $B_2$  alors  $Z$  est  $O_{2,2}$

Afin de préserver la cohérence de la base de règles [2] et l'interprétabilité des partitions de sortie, nous choisissons la partition de sortie (cf. figure 5) afin que leur intersection ne soit pas vide et que  $O_{1,1}$  et  $O_{2,2}$  forment une partition forte [1].

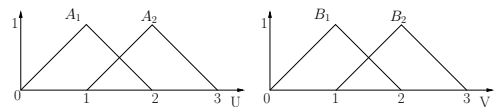


Figure 4 – Partitions d'entrée 2D

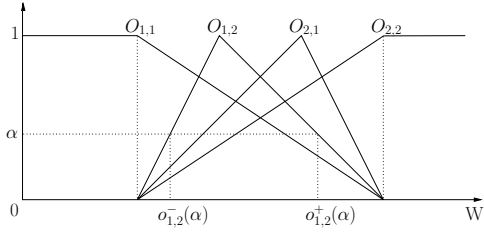


Figure 5 – Partition de sortie respectant la cohérence et l’interprétabilité du système

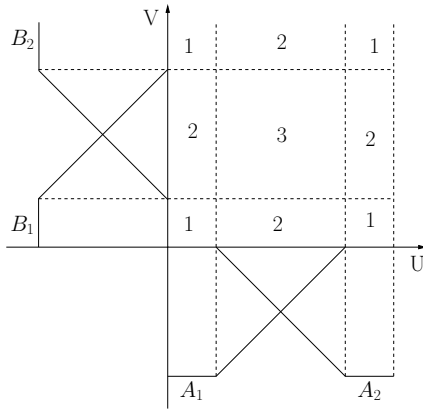


Figure 6 – Zones définies par les partitions d’entrées

## 4.2 Inférence 2D pour une entrée précise

Avec les partitions fortes, il y a trois situations différentes selon la position de l’entrée précise (cf figure 6). Par la suite, nous noterons  $o^-(\alpha)$  la plus petite des deux abscisses de  $W$  (univers de sortie) dont le degré d’appartenance à  $O$  est  $\alpha$ . La plus grande est notée  $o^+(\alpha)$  (cf. figure 5).

- Zone 1 : Les deux entrées appartiennent aux noyaux des ensembles flous  $A_k$  dans  $U$  et  $B_l$  dans  $V$ . Dans cette situation, il est possible d’inférer directement la sortie grâce à l’indépendance inférentielle des règles. Cette sortie est égale à  $Noyau(O_{k,l})$  pour l’implication de Resher-Gaines.
- Zone 2 : l’entrée  $x$  se situe sur le noyau de  $A_k$  et l’entrée  $y$  se situe entre les noyaux de  $B_l$  et  $B_{l+1}$ , ou vice-versa. Par conséquent, deux règles sont déclenchées :  $A_k \wedge B_l \rightarrow O_{k,l}$  et  $A_k \wedge B_{l+1} \rightarrow O_{k,l+1}$  ou  $A_k \wedge B_l \rightarrow O_{k,l}$  et

Zone	3.1	3.2	3.3	3.4
$\min(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$

Tableau 1 – Propriétés de chaque zone

$$A_{k+1} \wedge B_l \rightarrow O_{k+1,l}.$$

- Zone 3 :  $x$  et  $y$  sont entre les noyaux de deux ensembles flous adjacents dans  $U$  et  $V$  (cf. figure 7). Quatre règles sont activées dans cette configuration qui est la plus complexe.

Tout d’abord, nous traiterons la zone 3 puisque la zone 2 n’est en fait qu’un cas particulier de celle ci.

**Zone 3.** Etant donné une entrée précise, nous pouvons calculer la sortie de Resher-Gaines [1], qui est un intervalle défini par sa borne inférieure  $z_{min}$  et sa borne supérieure  $z_{max}$ . Les sous-zones de la zone 3 sont définies sur la figure 7 selon la valeur de  $m = \min(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ , où  $\alpha_1 = 1 - \alpha_2, \beta_1 = 1 - \beta_2$ . Le tableau 1 donne la valeur de  $m$  pour chaque zone. Nous détaillons l’inférence dans la zone 3.1. Dans la zone 3.1, la borne inférieure  $z_{min}$  peut provenir de 4 règles :

- $A_1 \wedge B_1 \rightarrow O_{1,1}$  nous donne la borne  $o_{1,1}^-(\beta_1)$  puisque  $\beta_1$  est plus petit que  $\alpha_1$ .
- $A_1 \wedge B_2 \rightarrow O_{1,2}$  nous donne la borne  $o_{1,2}^-(\alpha_1)$  puisque  $\alpha_1$  est plus petit que  $\beta_2$ .
- $A_2 \wedge B_1 \rightarrow O_{2,1}$  nous donne la borne  $o_{2,1}^-(\beta_1)$  puisque  $\beta_1$  est plus petit que  $\alpha_2$ .
- $A_2 \wedge B_2 \rightarrow O_{2,2}$  nous donne la borne  $o_{2,2}^-(\alpha_2)$  puisque  $\alpha_2$  est plus petit que  $\beta_2$ .

Puisque l’agrégation des règles est conjonctive, la borne inférieure  $z_{min}$  est la plus grande de ces bornes.

$$z_{min} = \max(o_{1,1}^-(\beta_1), o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,1}^-(\beta_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$$

$o_{1,1}^-(\beta_1)$  est toujours la plus petite puisque son maximum est la plus petite abscisse du noyau de  $O_{1,1}$ . De plus,  $o_{2,1}^-(\beta_1)$  est plus petite que  $o_{2,2}^-(\alpha_2)$  car  $\beta_1 < \alpha_2$ . Par conséquent la borne inférieure se simplifie en :

Zone	Borne inférieure $z_{min}$	Borne supérieure $z_{max}$
3.1	$\max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$	$\min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\alpha_1))$
3.2	$\max(o_{2,1}^-(\beta_1), o_{2,2}^-(\beta_2))$	$\min(o_{1,1}^+(\alpha_1), o_{2,1}^+(\beta_1))$
3.3	$\max(o_{2,1}^-(\alpha_2), o_{2,2}^-(\beta_2))$	$\min(o_{1,1}^+(\alpha_1), o_{2,1}^+(\alpha_2))$
3.4	$\max(o_{1,2}^-(\beta_2), o_{2,2}^-(\alpha_2))$	$\min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\beta_2))$

Tableau 2 – Intervalles de sortie de la zone 3

$$z_{min} = \max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$$

De la même manière, on calcule la borne supérieure  $z_{max} = \min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\alpha_1), o_{2,1}^+(\beta_1), o_{2,2}^+(\alpha_2))$  qui se simplifie de même en :  $z_{max} = \min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\alpha_1))$ .

Le tableau 2 récapitule les résultats pour toutes les sous-zones de la zone 3.

**Zone 2.** La zone 2 peut être vue comme un cas particulier de la zone 3. Il existe 4 zones adjacentes aux zones 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 (cf. figure 7). Les sorties de la zone 2 sont résumées dans le tableau 3 :

Area	Borne inférieure $z_{min}$	Borne supérieure $z_{max}$
2.1	$\max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$	$o_{1,2}^+(\alpha_1)$
2.2	$\max(o_{2,1}^-(\beta_1), o_{2,2}^-(\beta_2))$	$o_{2,1}^+(\beta_1)$
2.3	$o_{2,1}^-(\alpha_2)$	$\min(o_{1,1}^+(\alpha_1), o_{2,1}^+(\alpha_2))$
2.4	$o_{1,2}^-(\beta_2)$	$\min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\beta_2))$

Tableau 3 – Intervalles de sortie de la zone 2

### 4.3 Continuité des bornes de la sortie inférée

Dans cette section, on étudie si l'évolution des bornes de la sortie est continue lorsque les entrées passent d'une zone à une autre. La figure 7 montre toutes les transitions possibles. La zone 3 est le cas le plus général. Commençons par la transition concernant les zones 3.1 et 3.2. Cette transition a lieu lorsque  $\alpha_1 = \beta_1$  et  $\alpha_2 = \beta_2$ . La borne inférieure  $z_{min}$  devient alors :

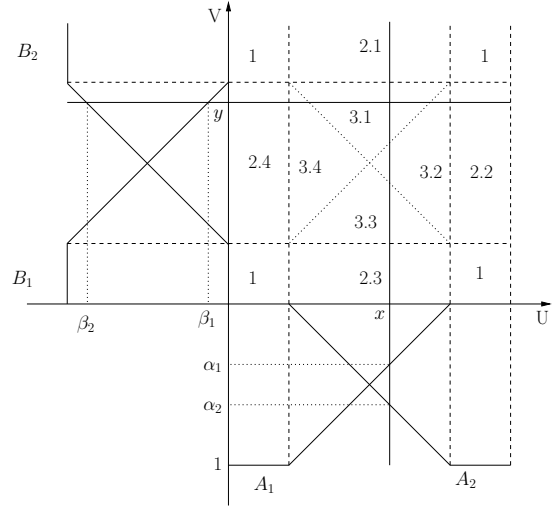


Figure 7 – Différentes sous-zones en entrée

- $z_{min3.1} = \max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$
- $z_{min3.2} = \max(o_{2,1}^-(\beta_1), o_{2,2}^-(\beta_2))$

Puisque  $\alpha_1 = \beta_1 < \alpha_2 = \beta_2$ ,  $z_{min3.1} = o_{2,2}^-(\alpha_2)$  et  $z_{min3.2} = o_{2,2}^-(\beta_2)$ . Par conséquent, nous obtenons  $z_{min3.1} = z_{min3.2}$  car  $\alpha_2 = \beta_2$ .

Considérons à présent la borne supérieure  $z_{max}$  :

- $z_{max3.1} = \min(o_{1,1}^+(\beta_1), o_{1,2}^+(\alpha_1))$
- $z_{max3.2} = \min(o_{1,1}^+(\alpha_1), o_{2,1}^+(\beta_1))$

Nous avons alors  $z_{max3.1} = o_{1,1}^+(\beta_1)$  et  $z_{max3.2} = o_{1,1}^+(\alpha_1)$ . Puisque  $\beta_1 = \alpha_1$ , nous obtenons  $z_{max3.1} = z_{max3.2}$ . On constate donc que les bornes de la sortie inférée sont continues entre les zones 3.1 et 3.2. De la même manière, les transitions entre les zones (3.2, 3.3), (3.3, 3.4) et (3.4, 3.1) sont continues.

De plus, pour le point unique à l'intersection des 4 zones, la continuité est aussi garantie. En effet, ce point correspond aux niveaux  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$ . La borne inférieure est alors égale à  $o_{2,2}^-(\alpha_2)$  pour chaque zone et la borne supérieure est égale à  $o_{1,1}^+(\alpha_1)$ .

Puisque la zone 2 et la zone 1 ne sont que des cas particuliers de la zone 3, les bornes de la sortie sont aussi continues pour ces zones.

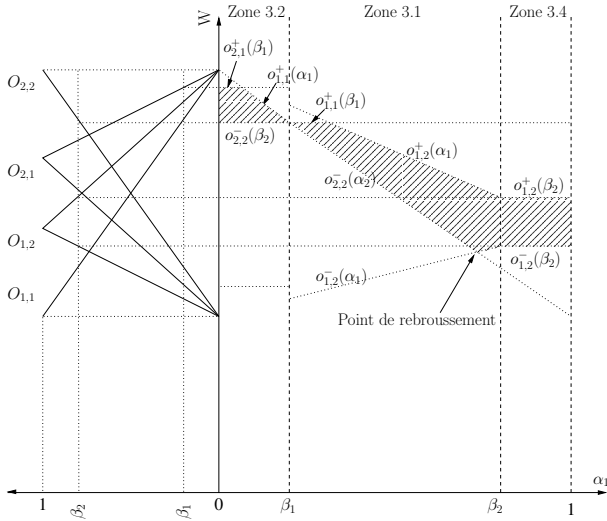


Figure 8 – Sortie en fonction de  $\alpha_1$

#### 4.4 Points anguleux

Seule une variation continue et *monotone* du système en fonction de l'entrée assure que le résultat de l'inférence est l'enveloppe convexe des sorties inférées à partir des bornes des entrées rectangulaires. Nous devons donc détecter les points anguleux et les prendre en compte dans le processus d'inférence. Un point anguleux est obtenu si les deux fonctions qui définissent une borne de la sortie (tableau 2) évoluent en directions opposées et se croisent.

Par exemple, sur la figure 8, un point anguleux apparaît pour la borne inférieure de la zone 3.1. Dans cette zone, la borne inférieure est égale à  $\max(o_{1,2}^-(\alpha_1), o_{2,2}^-(\alpha_2))$ , où  $o_{1,2}^-(\alpha_1)$  est croissante et  $o_{2,2}^-(\alpha_2)$  décroissante. Il y a donc un point anguleux lorsque  $o_{1,2}^-(\alpha_1) = o_{2,2}^-(\alpha_2)$ . Comme les ensembles flous  $O_{1,2}$  et  $O_{2,2}$  sont connus, nous pouvons facilement trouver le niveau  $\alpha_1$  qui correspond à ce point anguleux.

En fait, un point anguleux apparaît pour chaque zone sur une seule borne au plus, comme nous pouvons le voir dans le tableau 4.

Si on résume le processus d'inférence en deux dimensions, il est nécessaire de :

- Décomposer chaque partition d'entrée afin de

Zone	Borne inférieure	Borne supérieure
3.1	$o_{1,2}^-(\alpha_1) = o_{2,2}^-(\alpha_2)$	Non
3.2	$o_{2,1}^-(\beta_1) = o_{2,2}^-(\beta_2)$	Non
3.3	Non	$o_{1,1}^+(\alpha_1) = o_{2,1}^+(\alpha_2)$
3.4	Non	$o_{1,1}^+(\beta_1) = o_{1,2}^+(\beta_2)$

Tableau 4 – Conditions conduisant à des points anguleux selon la zone

séparer les noyaux des zones intermédiaires.

- Décomposer chaque entrée floue par  $\alpha$ -coupes afin de considérer chaque entrée floue comme un ensemble d'entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$ .
- Pour chaque entrée rectangulaire de niveau  $\alpha$ , il faudra :
  - Inférer à partir de chaque borne des entrées rectangulaires de niveau  $\alpha$ .
  - Tester s'il existe des points anguleux qui correspondent à des valeurs d'entrée comprises dans l'entrée rectangulaire considérée.
  - Inférer à partir de toutes les valeurs conduisant à des points anguleux afin de former une union de sorties monotones.
  - L'enveloppe convexe de toutes les sorties inférées ainsi est la sortie inférée pour cette entrée rectangulaire.
- L'union des sorties calculées pour toutes les entrées rectangulaires est le résultat final.

Une étude en cours s'appuie sur cette méthode pour modéliser un système de fabrication fromagère. Dans cette application, il est important de pouvoir considérer des entrées floues car les données issues des capteurs ont une imprécision assez forte. Les experts du domaine connaissent certaines relations entre les variables de ce système. C'est pour cette raison que le choix des règles implicatives est naturel car celles-ci sont adaptées à la modélisation de connaissances expertes. De plus, lorsque nous utilisons des systèmes de règles chaînées, inférer à partir d'entrées floues nous permet de propager cette imprécision.

## 5 Conclusion

Cet article propose une méthode efficace (complexité linéaire en fonction du nombre d' $\alpha$ -coupes pour un système bidimensionnel) permettant d'inférer avec des règles implicatives graduelles, grâce à une double décomposition. Une première décomposition par  $\alpha$ -coupes permet de simplifier chaque entrée floue en se ramenant à une union d'entrées rectangulaires. Ensuite la décomposition par partitionnement va nous permettre de séparer la partition en éléments facilement inférables. La décomposition par partitionnement s'effectue sans perte d'information, seule la décomposition par  $\alpha$ -coupes induit une approximation, dont l'impact mérite une étude. Dans le cas où la fonction d'appartenance est linéaire une solution analytique exacte pourrait être fournie.

Notre méthode, détaillée ici pour l'implication de Resher-Gaines, fournit une base pour le calcul de l'inférence 2D avec des règles implicatives quel que soit l'opérateur d'implication choisi et un point de départ pour la généralisation au delà de deux dimensions.

## Références

- [1] D. Dubois, H. Prade, and M. Grabisch. Gradual rules and the approximation of control laws. *Theoretical aspects of fuzzy control*, pages 147–181, 1995.
- [2] D. Dubois, H. Prade, and L. Ughetto. Checking the coherence and redundancy of fuzzy knowledge bases. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 5 :398–417, 1997.
- [3] S. Galichet, D. Dubois, and H. Prade. Imprecise specification of ill-known functions using gradual rules. *International Journal of Approximate Reasoning*, 35(3) :205–222, 2004.
- [4] H. Jones, D. Dubois, S. Guillaume, and B. Charnomordic. Méthode d'inférence générique avec plusieurs règles implicatives graduelles et une entrée floue. In *proceedings of LFA, Toulouse, France*, pages 145–152. Cépaduès, 2006.
- [5] H. Jones, S. Guillaume, B. Charnomordic, and D. Dubois. Practical use of fuzzy implicative gradual rules in knowledge representation and comparison with mamdani rules. In *proceedings of joint Eusflat-LFA, Barcelona, Spain*, 2005.
- [6] E. H. Mamdani and S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International journal on man-machine studies*, 7 :1–13, 1975.
- [7] R. Martin-Clouaire. Semantics and computation of the generalized modus ponens : The long paper. *International journal of Approximate Reasoning*, 3 :195–217, 1987.
- [8] L. Ughetto, D. Dubois, and H. Prade. Implicative and conjunctive fuzzy rules - A tool for reasoning from knowledge and examples. In *proceedings of AAI-99, Orlando, Floride (USA)*, pages 214–219, California, 1999. AAI Press/The MIT Press.
- [9] L. A. Zadeh. A theory of approximate reasoning. *Machine Intelligence*, 9 :149–194, 1979.