

# Vers une utilisation pratique des règles implicatives

## Towards a practical use of implicative rules

H. Jones<sup>1</sup>

S. Guillaume<sup>2</sup>

B. Charnomordic<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Hubert Curien

<sup>2</sup> Cemagref, UMR ITAP

<sup>3</sup> INRA, UMR ASB

18, Rue du Professeur Benoît Lauras 42000 Saint-Etienne, hazael.jones@gmail.com  
361, Rue JF Breton 34196 Montpellier Cedex 5, serge.guillaume@montpellier.cemagref.fr  
2, Place Viala 34060 Montpellier, bch@supagro.inra.fr

### Résumé :

Les règles implicatives, qui permettent de modéliser des contraintes, restent méconnues. Nous proposons dans cet article des lignes directrices pour la conception pratique de systèmes de règles implicatives : construction de partitions adaptées, interprétation des résultats de l'inférence, coopération de plusieurs systèmes de règles et sémantique. La méthodologie est appliquée à un procédé agroalimentaire.

### Mots-clés :

Règles floues, règles implicatives, interprétabilité, sémantique, coopération

### Abstract:

Implicative rules, which model constraints remain unknown. We propose in this article guidelines for building practical systems of implicative rules : design of suitable partitions, interpretation of inference results, system cooperation and semantics. The methodology is applied to a food process.

### Keywords:

Fuzzy rules, implicative rules, interpretability, semantics, cooperation

Jusqu'ici les règles implicatives floues [4] ont surtout été manipulées par des logiciens et il n'existe que très peu d'utilisations concrètes [12]. Elles ont été délaissées au profit des règles conjonctives [9] dont les éléments d'interprétation sont bien connus. Les règles implicatives et les règles conjonctives n'ont pas le même sens et les sorties représentent deux types d'information sur une même échelle.

Les principales différences entre règles conjonctives et implicatives sont :

- un raisonnement différent,
- la détection d'incohérences,
- des partitions différentes,

- le respect de l'imprécision des entrées,
- une interprétation différente.

En section 1, nous rappelons ce que sont les règles implicatives, leurs avantages et inconvénients vis-à-vis des règles conjonctives. Ensuite, nous abordons les notions de cohérence et d'interprétabilité pour des règles implicatives. La section 3 porte sur les sorties inférées à partir de règles implicatives et propose une méthode de quantification des résultats obtenus. Enfin, nous évoquons la collaboration de plusieurs systèmes de règles implicatives (section 4) et une application concrète est traitée en section 5.

## 1 Règles implicatives

Rappelons quelques propriétés des règles implicatives qui peuvent être vues comme une application directe des théories de Zadeh sur le raisonnement approché [14] et une extension de la logique classique. Elles permettent notamment de généraliser le modus ponens  $A \wedge (A \rightarrow O) \models O$  de l'inférence logique [10].

Cela signifie que d'un fait approché  $A'$  et de l'implication  $A \rightarrow O$ , on est capable de déduire un ensemble de valeurs possibles  $O'$  défini par :

$$\mu_{O'}(v) = \sup_{u \in U} \top(\mu_{A'}(u), \mu_A(u) \rightarrow \mu_O(v))$$

Les opérateurs de conjonction  $\top$  et d'implication  $\rightarrow$  ne sont pas indépendants : le choix de l'un détermine l'autre. L'agrégation de ces règles se fait de manière conjonctive car celles-ci représentent une possibilité non garantie : des valeurs considérées comme possibles par une règle peuvent être interdites par d'autres règles.

Il existe deux types de règles implicatives : les règles à certitude et les règles graduelles. Dans cet article, nous étudions exclusivement les règles graduelles. Le comportement des règles implicatives graduelles, « plus  $X$  est  $A$ , alors plus  $Y$  est  $O$  », dépend de l'implication choisie. Nous considérons ici l'implication de Resher-Gaines (figure 1) :  $a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , car elle donne le noyau des autres implications résiduelles.

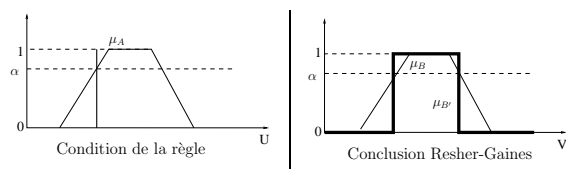


Figure 1 – Inférence avec une règle implicative graduelle et une entrée précise

La figure 2 et le tableau 1 résument les différences principales entre règles implicatives et règles conjonctives. Utilisé dans des applications réelles, l'accumulation de règles rend la sortie d'un système conjonctif peu informative. Ceci est corrigé, voire masqué, par une étape de défuzzification. Avec les règles implicatives, c'est le phénomène contraire qui se produit. Pour un comparatif plus détaillé, le lecteur se référera à [8].

## 2 Cohérence et interprétabilité de la sortie

Avant tout, notons que dans les deux types de systèmes les partitions d'entrée peuvent être identiques. On choisit d'utiliser des partitions floues fortes (PFF) pour leurs bonnes propriétés (figure 4).

Type de règles	conjonctive	implicative
Distribution de possibilité obtenue	garantie $\delta_z(x)$	potentielle $\pi_z(x)$
Défuzzification	obligatoire	facultative
Ajout de règles dans une base	moins de précision	plus de précision
Incohérence	non détectée	sortie = $\emptyset$
Inférence entrées floues	règle à règle (facile)	plus complexe

Tableau 1 – Comparaison des règles implicatives et conjonctives

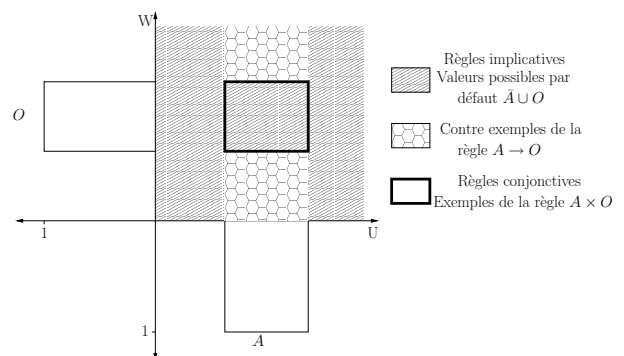


Figure 2 – Représentation des valeurs d'une règle implicative  $A \rightarrow O$  et d'une règle conjonctive  $A \wedge O$

Ce n'est pas le cas de la partition de sortie du fait de l'agrégation conjonctive des règles implicatives. Pour ces systèmes, le résultat sera un compromis entre cohérence et interprétabilité. Rappelons les définitions de ces termes :

- **Cohérence** [1, 5, 13] d'un ensemble de règles implicatives : un système de règles implicatives est cohérent si pour toutes les valeurs d'entrée possibles, il existe au moins une valeur de la sortie inférée complètement compatible, cela signifie que la sortie inférée doit être normalisée.
- **Interprétabilité** : cette notion est bien définie en ce qui concerne les règles conjonctives [3, 6, 2], et les PFF remplissent ces conditions. Pour les règles implicatives, si l'on veut que la base de règles reste cohérente, les ensembles de sorties dont les règles sont activées simultanément doivent avoir une intersection non vide. Ceci limite le nombre de sous ensembles flous de la parti-

tion de sortie et implique l'utilisation de partitions de sorties qui ne soient pas des PFF. En effet, le degré de couverture (figure 3) de la partition de sortie doit respecter deux conditions :

- Etre supérieur ou égal au degré de couverture de la partition d'entrée.
- Permettre une sortie normalisée (ce qui entraîne en général un degré de couverture de sortie à  $2/3$ )

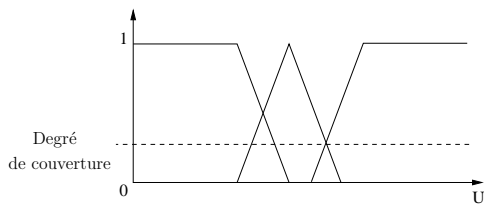


Figure 3 – Degré de couverture d'une partition

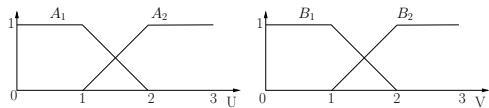


Figure 4 – PFF en entrée

Etudions différents cas :

- 2 entrées sur 2 dimensions : les règles  $A_1 \wedge B_1 \rightarrow O_{1,1}$ ,  $A_1 \wedge B_2 \rightarrow O_{1,2}$ ,  $A_2 \wedge B_1 \rightarrow O_{2,1}$  et  $A_2 \wedge B_2 \rightarrow O_{2,2}$  peuvent être activées pour une même entrée. Par conséquent,  $O_{1,1}$ ,  $O_{1,2}$ ,  $O_{2,1}$  et  $O_{2,2}$  doivent avoir une intersection non vide comme le montre la figure 5.

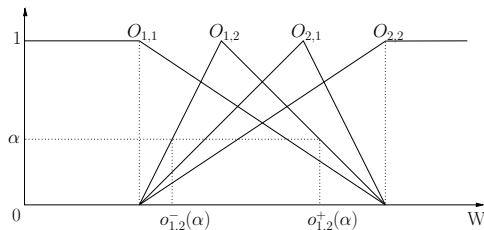


Figure 5 – Partition de sortie quasi forte : PQF

- 3 entrées sur 2 dimensions : avec trois entrées par dimension, on obtient un total de 9 règles. La figure 6 illustre graphiquement les combinaisons qui doivent être conjointement possibles. Puisque l'on a des partitions fortes en

entrée, il est normal que  $O_{1,1}$  et  $O_{3,3}$  n'aient pas d'intersection commune car il n'est pas possible d'activer en même temps ces règles. En revanche, toutes les règles doivent avoir une intersection commune avec  $O_{2,2}$ . On en vient donc à tracer la partition de la figure 7. Cependant cette partition est difficilement interprétable puisqu'elle contient plus de 7 sous-ensembles flous [11] qui se chevauchent tous.

Afin de réduire le nombre de sous-ensembles de cette partition de sortie, si les variables du système de règles jouent un rôle symétrique, on peut réduire le nombre de terme à 5 comme indiqué sur la figure 8. Dans un système où les informations sont graduelles, ce type de compensation est naturel.

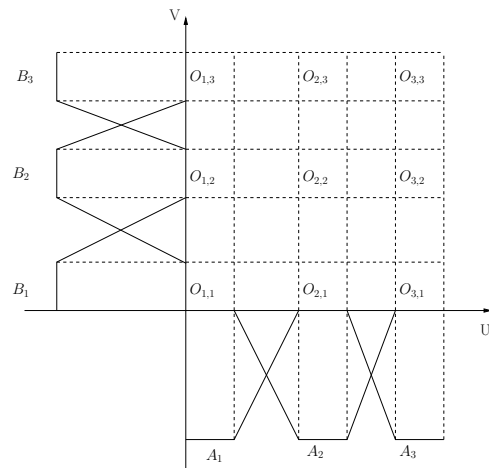


Figure 6 – Partitions d'entrée et conclusions correspondantes

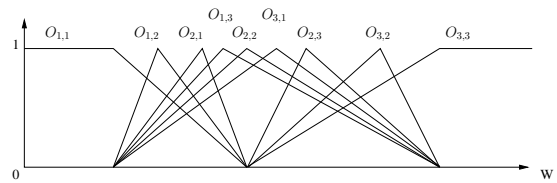


Figure 7 – Partition de sortie (9 termes)

La sortie inférée avec de telles partitions est normalisée, donc cohérente avec le système de règles [7]. Nous appellerons de telles partitions, qui représentent un compromis entre interprétabilité et cohérence, des partitions quasi

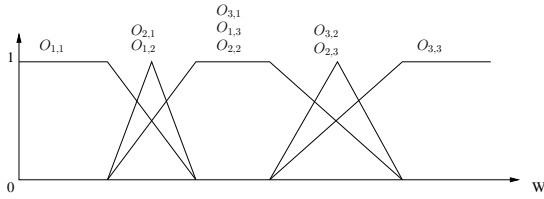


Figure 8 – Partition de sortie (5 termes)

fortes (PQF). En effet, la cohérence du système incite à construire des partitions avec un fort chevauchement, tandis que l'interprétabilité invite à le limiter.

### 3 Sortie inférée à partir d'un système de règles implicatives

La figure 9 montre le résultat de l'inférence à partir d'une entrée imprécise pour les règles implicatives (type Resher-Gaines)  $A_1 \rightarrow O_1$  et  $A_2 \rightarrow O_2$  et les règles conjonctives (type Mamdani)  $A_1 \times O_1$  et  $A_2 \times O_2$ .

#### 3.1 Imprécision des sorties

Nous remarquons que le résultat obtenu avec des règles conjonctives recouvre l'ensemble de la partition et est sous-normalisé. Le résultat obtenu avec des règles implicatives est normalisé et bien plus précis, puisqu'il est situé dans l'intersection des conclusions des différentes règles du fait du processus d'agrégation conjonctif. Il indique l'intervalle des valeurs pour lesquels cette sortie est totalement possible (mais pas garantie). En revanche, les valeurs en dehors du support sont impossibles à atteindre avec ce type de règles.

Selon le cas, on s'intéressera plutôt au noyau ou au support de la sortie inférée. Dans les deux cas, leur largeur est fidèle à l'imprécision des entrées : c'est une différence majeure avec les règles conjonctives.

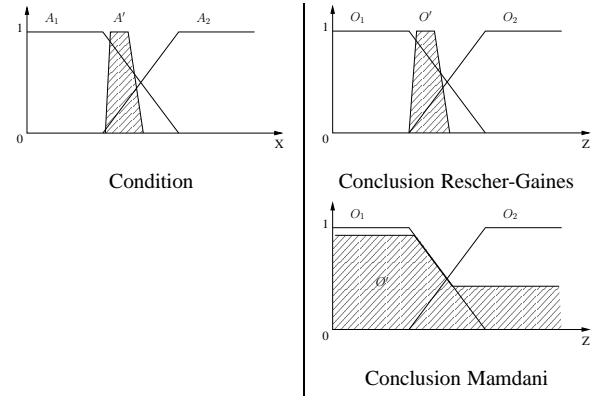


Figure 9 – Inférence d'une entrée imprécise

#### 3.2 Quantification d'une sortie imprécise : attribution d'étiquettes

Nous nous intéressons ici seulement au noyau des sorties inférées. Une analyse similaire pourrait être faite sur le support. La sortie inférée étant alors un intervalle, nous voulons arriver à caractériser sa proximité avec la sortie observée. Nous proposons deux étiquettes :

- **l'erreur commise** (en nombre de sous-ensembles flous (SEF)). L'étiquette quantifiant l'erreur effectuée peut varier de 0 (aucune erreur) à  $nb_{sef} - 1$ .
- **l'imprécision de la sortie inférée** : La sortie inférée étant normalisée, elle intersecte au moins un SEF de sortie. L'étiquette (0) représente l'imprécision minimale et augmente selon le nombre de sous-ensembles supplémentaires chevauchés. L'étiquette quantifiant l'imprécision peut donc prendre des valeurs de 0 à  $nb_{sef} - 1$ .

Pour un système utilisant 5 SEF en sortie, la figure 10 illustre les étiquettes 02 (pas d'erreur mais deux sous-ensembles d'imprécision), 00 (aucune erreur et aucune imprécision), 40 (erreur maximale de quatre sous-ensembles mais pas d'imprécision) et 21 (erreur de deux ensembles et imprécision d'un sous-ensemble).

Cette méthode permet de rendre compte, de façon symbolique, de la qualité de l'inférence par rapport à deux critères : erreur commise et

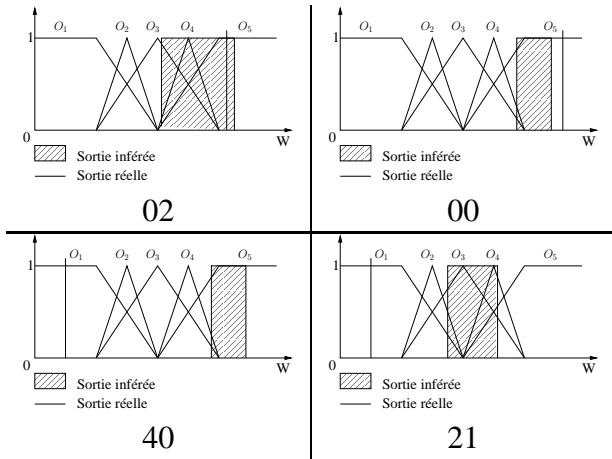


Figure 10 – Etiquettes attribuées

précision. Lorsque la sortie observée est elle-même imprécise, on pourra faire cette comparaison sur un intervalle.

#### 4 Coopération de systèmes

Lorsqu'on considère des sous-systèmes (même sur un univers de sortie identique), on accepte qu'il n'y ait pas d'interaction entre les variables de systèmes différents (hypothèse d'indépendance).

Les différentes possibilités de coopération sont les suivantes :

- En parallèle : la figure 11 montre le principe de fonctionnement du raffinement en parallèle. Puisqu'avec les règles implicatives chaque règle exprime une restriction du domaine des possibles, ajouter une nouvelle variable et de nouvelles règles dans une base revient donc à imposer de nouvelles contraintes au système.

L'inconvénient des combinaisons en parallèle est le risque d'incohérences. En effet, si l'intersection des sorties issues de deux systèmes est vide, la sortie globale du système sera alors impossible. Une solution est de choisir l'un des deux systèmes comme prioritaire et de n'utiliser l'autre que lorsqu'il affine les résultats du premier (il ne pourra pas les rendre plus imprécis).

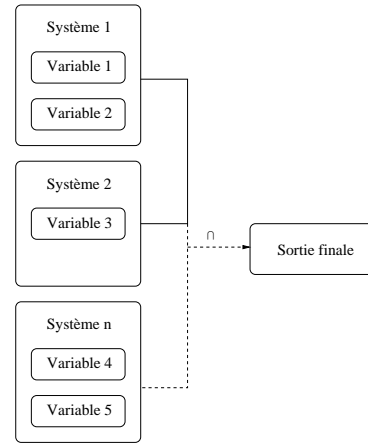


Figure 11 – Principe du raffinement en parallèle

- En cascade : l'objectif d'un tel chaînage, illustré sur la figure 12 est de pouvoir réutiliser une sortie en entrée d'un autre système. Il s'applique à l'ensemble des processus séquentiels (processus de transformation, processus temporel, ...) et construction de variables agrégées. Il est important de prendre en compte certains aspects :

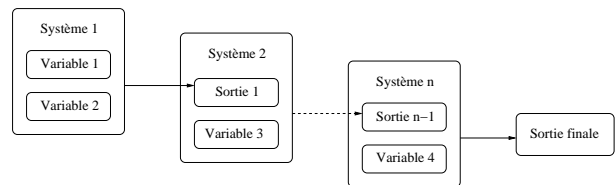


Figure 12 – Principe du raffinement en cascade

1. Le passage de l'univers de sortie (PQF) à l'univers d'entrée (PFF). Pour effectuer ce changement de partition, on peut supprimer le sous-ensemble non PFF sur la partition ou modifier les deux sous-ensembles qui formaient une PFF en sortie (cf figure 13). Le choix dépendra du nombre de sous-ensembles flous nécessaire pour exprimer les règles du nouveau système.
2. Le respect de l'imprécision : les règles implicatives se prêtent bien à cette ré-utilisation car l'imprécision de la sortie a un sens et la défuzzification n'est pas obligatoire.

- Combinaison des deux types de coopération.

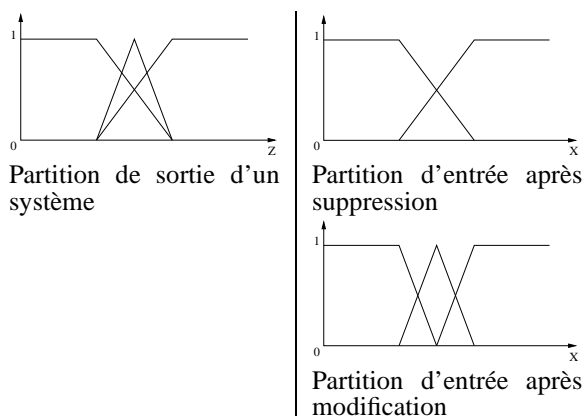


Figure 13 – Reconstruction de la partition d'entrée à partir de la partition de sortie

L'intérêt de la collaboration entre systèmes est de décomposer des systèmes utilisant de nombreuses variables en les couplant en parallèle ou de manière séquentielle et l'inconvénient est le côté réducteur de la décomposition d'un problème.

## 5 Application

L'application traitée concerne la fabrication fromagère du Comté (pâte pressée cuite). Le but est de prédire la fermeté de la pâte en utilisant les variables avant affinage ainsi qu'un certain nombre de connaissances expertes. On utilisera des entrées précises dans cette application.

### 5.1 Système considéré

Nous ne considérons ici que les variables qui ont un sens fort pour l'expert. Certaines d'entre elles ont été mises en évidence par des approches automatiques. Les variables choisies sont l'évolution de l'extrait sec (EvoES), l'humidité du fromage dégraissé (en talon) HFD, le rapport Gras sur Sec (GS) et la saison. Les règles expertes sont exprimées dans un premier système : **BR1** (tableau 2).

Selon les experts, le passage d'un label à l'autre est très progressif. Nous avons donc décidé de créer des ensembles flous dont les zones de

chevauchement sont assez importantes. Chaque partition est définie par deux sous-ensembles afin de limiter le nombre de règles possibles.

Conditions				Conclusion
EvoES	HFD	GS	Saison	pâte
faible	fort	fort		molle
faible	fort	faible	herbe	molle
faible	fort	faible	foin	normale
faible	faible			normale
fort	fort	fort	herbe	normale
fort	fort	fort	foin	ferme
fort	fort	faible		ferme
fort	faible	fort	herbe	normale
fort	faible	fort	foin	ferme
fort	faible	faible		ferme

Tableau 2 – Base de règles **BR1**

Les résultats de ce système de règles implicatives pour un échantillon de 103 fromages sont donnés dans le tableau 3. On obtient 29 mauvaises prédictions et 68 prédictions correctes dont les 2/3 sont imprécises. La valeur défuzzifiée (moyenne des maxima) est une information moins riche qui montre bien l'intérêt de prendre en compte une quantification sémantique. L'erreur numérique calculée par Root Mean Square Error (RMSE) est de 1.58.

Qualité de la prédiction	Fromages concernés	
	BR1	BR1 défuzzifiée
Bonne et précise	25	56
Bonne et imprécise	43	
très imprécise	6	
mauvaise	16	38
très mauvaise	7	9
mauvaise et imprécise	6	

Tableau 3 – Résultats de l'inférence à partir du système de règles utilisant EvoES, HFD, GS et Saison

### 5.2 Analyse des prédictions imprécises et très imprécises

Afin de sélectionner les variables permettant de rendre la prédiction plus précise, nous avons utilisé un arbre de décision en ne prenant en compte que les fromages menant à des prédictions bonnes mais imprécises pour

voir s'il était possible d'améliorer ce système. Nous utilisons un raffinement en parallèle pour préciser les résultats obtenus avec **BR1**.

### 5.3 Création d'un système à partir de ces résultats

Nous avons construit les partitions d'entrées de deux sous-ensembles flous par variable à partir des bornes données par l'arbre de décision. Les 4 règles construites sont données par le tableau 4 (système **BR2**). On remarque qu'on réutilise les variables EvolES et GS. Seule la variable PH est nouvelle.

Conditions			Conclusion
EvolES	PH	GS	pâte
faible			molle
fort	fort		normale
fort	faible	fort	normale
fort	faible	faible	ferme

Tableau 4 – Base de règles **BR2**

L'objectif du raffinement est de préciser la prédiction du premier système lorsque cela est possible et non de détecter des incohérences. L'architecture du raffinement est présentée sur la figure 14. Ainsi, le premier système (**BR1**) reste prioritaire, ce qui est souhaité car c'est le système défini sur l'ensemble des fromages et qui est en accord avec les connaissances expertes. Le raffinement est effectué de la manière suivante : on réalise l'intersection de la sortie de **BR1** et de celle de **BR2**. Si celle-ci est vide, on conserve le résultat obtenu avec **BR1**. Le résultat final est appelé **BR3** et donné dans le tableau 5.

Il y a 67 prédictions correctes (la prédiction très imprécise n'apporte rien au système puisqu'on ne peut pas décider entre mou, moyen et ferme) et 35 mauvaises prédictions dont la prédiction très imprécise. Nous avons donc amélioré de manière significative la qualité des résultats grâce au raffinement des prédictions imprécises. A présent, 2/3 des bonnes prédictions sont précises alors qu'avant raffinement, seulement 1/3 l'étaient. Les résultats après défuzzification

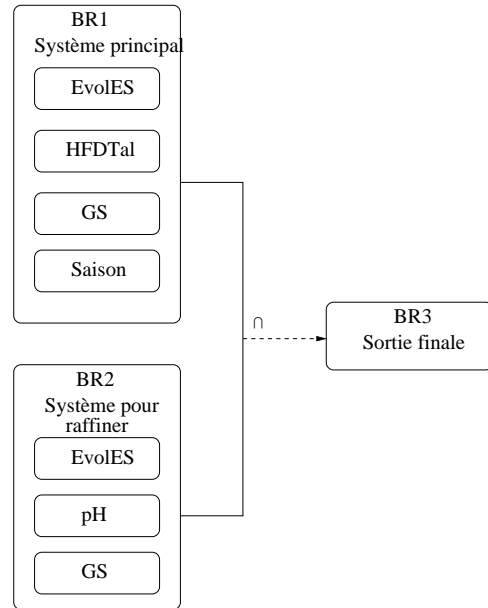


Figure 14 – Raffinement du système principal par le second système

sont meilleurs que les premiers ce qui prouve que lorsqu'on défuzzifie des bonne prédictions plus précises, on a plus de chances d'être proche du résultat. L'erreur calculée par RMSE est égale à 1.34, ce qui correspond à une amélioration de 15%.

Qualité de la prédiction	Fromages concernés	
	BR3	BR3 défuzzifiée
Bonne et précise	39	61
Bonne et imprécise	28	
très imprécise	1	
mauvaise	25	36
très mauvaise	6	6
mauvaise et imprécise	4	

Tableau 5 – Résultats de l'inférence à partir du système de règles utilisant EvolES, HFD, GS et Saison

## 6 Conclusion

La manipulation de bases de règles implicatives bouleverse certaines de nos pratiques. Le point fondamental concerne leur signification. Les règles habituellement utilisées dans les systèmes d'inférence sont les règles conjonctives, or elles sont adaptées à la représentation

d'une accumulation de données. Les règles implicatives représentent des contraintes. Nous avons présenté des lignes directrices pour l'utilisation pratique de règles implicatives : cohérence du système de règles, construction des partitions de sorties, quantification sémantique de la sortie et combinaison de systèmes.

Il serait intéressant de construire des systèmes permettant de faire interagir les règles implicatives et les règles conjonctives au sein d'une même base de règles. En effet, un système complexe contient deux types d'information : des modèles issus de l'expertise et des valeurs garanties possibles issues de données observées. Traiter ces deux types d'information conjointement améliorerait la capacité de modélisation des systèmes d'inférence floue.

#### Remerciements :

Les auteurs tiennent à remercier Didier Dubois qui a rendu ce travail possible grâce à ses conseils avisés.

#### Références

- [1] M. Ayel and M.-C. Rousset. *La cohérence dans les bases de connaissances*. Cépaduès-Éditions, Toulouse, France, 1990.
- [2] J. Casillas, O. Cordon, F. Herrera, and L. Magdalena. *Interpretability Issues in Fuzzy Modeling*, volume 128 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, 2003.
- [3] J. V. De Oliveira. Semantic constraints for membership function optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A*, 29(1) :128–138, 1999.
- [4] D. Dubois and H. Prade. Fuzzy rules in knowledge-based systems - Modelling gradedness, uncertainty and preference. In R. Yager and L. Zadeh, editors, *An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems*, pages 45–68. Kluwer Acad. Publ., 1992. DP179.
- [5] D. Dubois, H. Prade, and L. Ughetto. Checking the coherence and redundancy of fuzzy knowledge bases. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 5 :398–417, 1997.
- [6] S. Guillaume. Designing fuzzy inference systems from data : an interpretability-oriented review. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9 :426–443, 2001.
- [7] H. Jones, D. Dubois, S. Guillaume, and B. Charnomordic. A practical inference method with several implicative gradual rules and a fuzzy input : one and two dimensions. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems, London, England*, pages 763–768, 2007.
- [8] H. Jones, S. Guillaume, B. Charnomordic, and D. Dubois. Practical use of fuzzy implicative gradual rules in knowledge representation and comparison with mamdani rules. In *EUSFLAT, Barcelone*. EUSFLAT, 2005.
- [9] E. H. Mamdani and S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International journal on man-machine studies*, 7 :1–13, 1975.
- [10] R. Martin-Clouaire. Semantics and computation of the generalized modus ponens : The long paper. *International journal of Approximate Reasoning*, 3 :195–217, 1987.
- [11] G. Miller. The magical number seven, plus or minus two : Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63 :81–97, 1956.
- [12] D. Saint-Joan and J. Desachy. A Fuzzy Expert System for Geographical Problems : an Agricultural Application. In *FUZZ-IEEE/IFES'95, Yokohama, Japon*, volume 2, pages 469–476, <http://www.ieee.org/>, mars 1995. IEEE.
- [13] L. Ughetto. *Les systèmes à base de règles floues. Vérification de la cohérence et méthodes d'inférence*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 1998.
- [14] L. A. Zadeh. A theory of approximate reasoning. *Machine Intelligence*, 9 :149–194, 1979.